Faculté des Sciences

MATHEMATIQUES GENERALES II, F. Bastin
« partim B »

EXERCICES DE BASE

Bachelier (Bloc 2) en Biologie et Géographie

Année académique 2020-2021

Jacqueline CRASBORN

Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du cours de MATHEMATIQUES GENERALES II de l'année académique 2020-2021. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière de ce cours s'adressant aux futurs bacheliers de deuxième bloc en biologie et en géographie.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener, au plus vite, les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory et Christophe Dozot, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2020 - 2021

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;
4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés "'Bases" et "Exercices de base" ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,

— dans l'organisation et la planification de son travail ;

5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions habituellement non vues dans l'enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices "modèle" pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors de la répétition suivante ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule.

Table des matières des répétitions pour 2020-2021

1. Calcul matriciel (1).
2. Calcul matriciel (2).
3. Compléments.
4. Fonctions de plusieurs variables (1).
5. Fonctions de plusieurs variables (2).
6. Fonctions de plusieurs variables (3).
7. Approximations polynomiales.
8. Révisions en vue de l'examen.

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2020 - 2021

AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la version actuelle du cours de Mathématiques générales II de F. Bastin. Les listes des années suivantes se trouvent sur la page web relative au cours.

Les exercices des répétitions du cours Mathématique (partim B) pour l'année académique 2020-2021 se trouvent au chapitre 1. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 2 à 4 inclus. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 5.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2020 - 2021

Année académique 2020-2021

Mathématiques générales II

Listes type

Répétitions Biologie et Géographie (B2)

Version 31 août 2020

Chapitre 1

Listes d'exercices

Liste 1 : calcul matriciel (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.
5. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
6. Citer les propriétés liées aux déterminants.
7. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
8. Quelle est la forme de cette matrice ?
9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

Préambule

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Après modélisation, l'outil « matrices » permet d'effectuer de manière efficace, claire et très gérable, des calculs et estimations qui semblent à priori parfois complexes.

In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after P. H. Leslie. The Leslie Matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), [...]. [1] En utilisant les matrices, les éléments qui y sont liés (détermimant, valeurs propres, vecteurs propres, . . .), on récolte beaucoup d'informations quant à l'évolution de la population modélisée, comme des taux de croissance à long terme, l'estimation de tel ou tel type d'individus après un certain temps, etc

1. Le texte qui suit est tiré de Wikipedia.

REMARQUE pour cette liste
- Plusieurs exercices ont déja été faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(2-7), II. 1(A - C) et III. (D) seront résolus par l'assistant.

I. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij}=2$, $\forall i,j$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $C=AB-BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C}+C$.

3. On donne la matrice$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2-5A+6I=0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x\in\mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A=\begin{pmatrix} 1-x & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3+x \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}.$$

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
6. Qu'appelle-t-on matrice stochastique ? (si vu au cours)
7. Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ? (si vu au cours)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 (si vu au cours) seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce résultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?
3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 2 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 75 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 20.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 1 fois sur 2 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
   $$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   — Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
   — Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
   — Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice
   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   est aussi une matrice qui représente une rotation.

4. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.
   (c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.
   (d) Si deux colonnes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(4A) = 4 \det A$.
   (f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la colonne 2 de A par 4, alors $\det B = 4 \det A$.

Liste 3 : compléments

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices reprend des énoncés du type de ceux résolus au premier bac. Ces rappels relatifs aux représentations d'ensembles, à la dérivation et au calcul intégral seront utiles pour les exercices portant sur les fonctions de plusieurs variables.

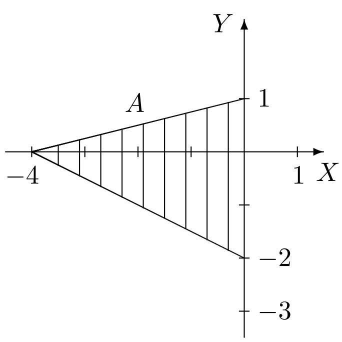
A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

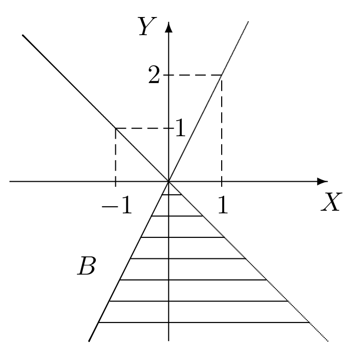
I. Représentation d'ensembles

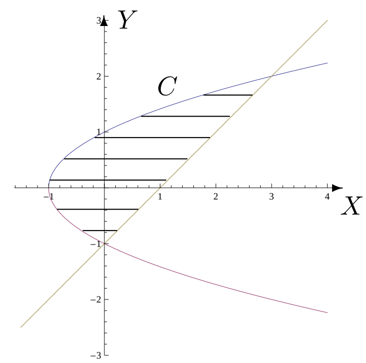
1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\begin{array}{l} \text{a) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36-9x^2}\}\} \\ \text{b) } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2-1\} \\ \text{c) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1,2]\} \end{array}$$

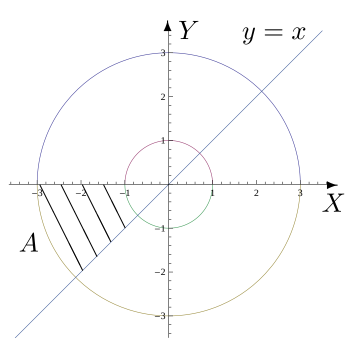
2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.

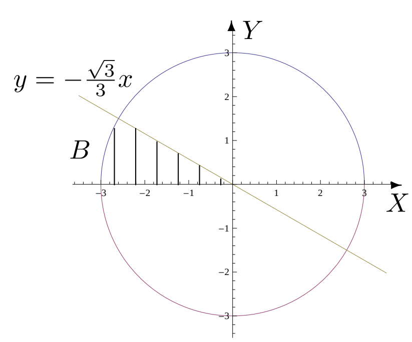






3. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble A mais non dans B.





4. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$
Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

II. Dérivation

1. En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si
a) $f : x \mapsto |x^2 - 9|$ et $x_0 = 2$
b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ et $x_0 = 3$
2. a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2, 2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2 - 1})$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?
b) Même question pour g dérivable sur$]-\frac{\pi}{2}, 0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x - 1))$.

III. Calcul intégral

1. a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, 1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2 \cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
2. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes
$$a) \int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4}\ dx$$
3. On considère l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\dfrac{3x}{2} \leq y \leq \dfrac{3x}{2},\ y \geq x^2 - 1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.

IV. Divers

1. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut
$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78).0,22}$$
Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?
2. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut
$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5 - x)(0,25 - x)}$$
Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?
3. En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface de niveau d'une fonction de 3 variables ?
4. trace d'une surface de niveau dans un plan orthogonal à l'un des axes ?
5. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) - 2(b) - 4(a), II. 2(h) - 5(c) seront résolus par l'assistant.

I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.
$$f(x,y) = \ln\left(4y^2 - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{4 - |x-2y|}, \quad h(x,y) = \operatorname{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1,-2,)$ par f, de $(5,3)$ par g et de $(-1,1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
a) $f(x,y) = 3x - y$ et $c = -2,\ 3$
b) $f(x,y) = y^2 - x^2$ et $c = -4,\ 0,\ 4$
c) $f(x,y) = x^2 - 2y$ et $c = -2,\ 4$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 9z$ dans le plan d'équation $x = 0$ puis dans celui d'équation $y = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?
4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont
$$a)\ \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad\qquad b)\ x^2 - y^2 = 4.$$

II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par
$$f(x,y) = \ln(x^2 - 1 - y), \quad g(x,y) = \sin(x^3y^2 + 3y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = y^2\, e^{-\frac{y}{x}}.$$
a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 - 4y^2})$.
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_2^3 \sin(x_1x_3)$.
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = y^2 e^{x^2 y\, \sqrt{2z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2 - y + 1}).$$
a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $\dfrac{|x|}{|y|} D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y))$, $(x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On donne la fonction $f(x,y) = \cos(ax)\sin(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.

8. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on "permutation de l'ordre d'intégration" dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du resultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(a-b-c) - 4, II. 1(a) et III. 2(b) - 3(b) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,3[\times]-2,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(2x-y, x+2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
   b) Même question pour la fonction g, fonction continûment dérivable sur $]-1,1[\times]\ln\frac{\pi}{6},+\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(2x),\ \ln(\arcsin(y/2)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en 3/2 ?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(2) = 3,\ y(2) = 5,\ (Dx)(2) = -1,\ (Dy)(2) = 4,\ (D_xf)(3,5) = 6$ et $(D_yf)(3,5) = -2$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 2, que vaut (DF)(2) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(0,1)$ si

$$u(0,1) = -2 \quad (D_su)(0,1) = 2 \quad (D_tu)(0,1) = 4$$

$$v(0,1) = 5 \quad (D_s v)(0,1) = 3 \quad (D_t v)(0,1) = 6$$

et $(D_u f)(-2,5) = -1$ et $(D_v f)(-2,5) = 8$, calculer $(D_s F)(0,1)$ et $(D_t F)(0,1)$.

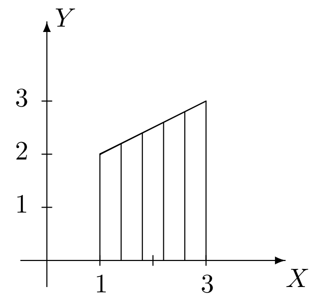
II. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f soit intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{2} \left(\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{2} \left(\int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$



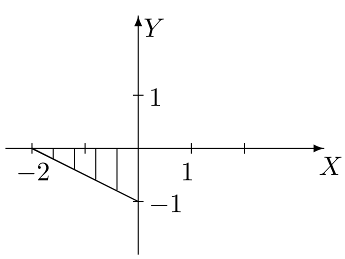
III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = y\cos(x)$.

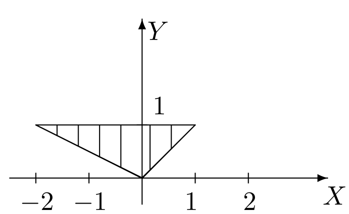
2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 - x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [x^2, 8 - x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-1,x]\}$
   c) $f(x,y) = x + 2y$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$
   d) $f(x,y) = x^2\cos(xy)$ sur $A = [-1,1] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

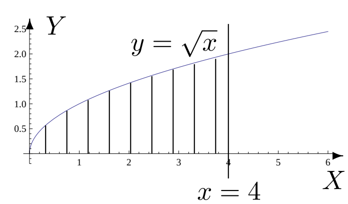
a) $\iint_A e^{2x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy^2\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{4+x^2}}\ dx\,dy$



Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Volume d'un corps

Quelle est l'interprétation "graphique" de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur un ensemble fermé borné du plan ?

II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné parallèle à l'axe Y, quand dit-on qu'elle est intégrable sur A ? Comment définit-on alors son intégrale ?
2. Même question si l'ensemble A est parallèle à l'axe X.
3. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ?

III. Intégration par changement de variables polaires

1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2, II. 2(b) et III. 3 seront résolus par l'assistant.

I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0,\ y = -2$ et $y = 3$.
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $x - y + 2z = 4$

II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.

   a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x^2}\, dx\, dy \qquad \text{avec} \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \tfrac{2}{x}\}$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{2y-x}\, dx \right) dy$

   c) $\displaystyle\iint_A e^{-x^2}\, dx\, dy \qquad \text{avec} \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

d) $\displaystyle\iint_A y^3\, e^{-xy^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \le xy\}$

2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{y^2/4} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right) dy, \quad b) \int_0^2 \left(\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{4x^2} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx$$

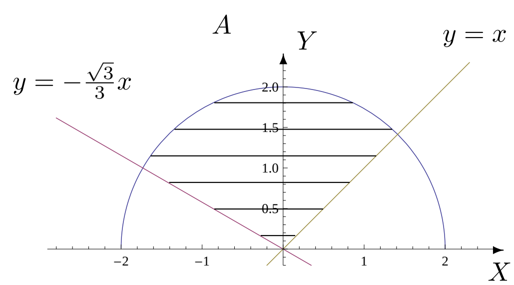
3. On considère l'intégrale double suivante

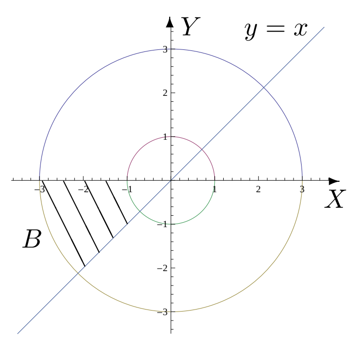
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \sin(y-x) e^{-x}\, dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

III. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
a) $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
b) $\displaystyle\iint_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
c) $\displaystyle\iint_C (x+3y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\, dx\, dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\, dx\, dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

3. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.

Liste 7 : approximations polynomiales

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé "Développement limité de Taylor".
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

Préambule Cette liste concerne les **approximations polynomiales.**

*****

Qu'entend-on par approximation polynomiale d'une fonction dans le cas où celle-ci est suffisamment dérivable ?
Comment introduire ces approximations à partir des connaissances actuelles ?
A quoi peuvent servir ces approximations ?

*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t-a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p-1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques. Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance[2] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

REMARQUE pour cette liste
Plusieurs exercices d'approximations polynomiales seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1 ($f_3,\ f_6$) - 2 - 3 seront résolus par l'assistant.

Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.

   $f_1(x) = \cos(x)\ e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+4x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$

   $f_3(x) = \dfrac{1}{2-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_4(x) = \text{arcotg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1), n = 0,1,2$

   $f_5(x) = \sin^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_6(x) = \cos(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

2. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction sin et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...
   Comment peuvent-ils procéder ?

2. entre les centres respectifs

Liste 8 : Révisions en vue de l'examen

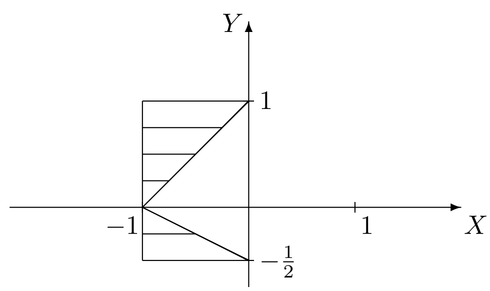
Fonctions de plusieurs variables

1. On donne la fonction f par
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y-1}$$
   a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t+1, 3t^2)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.
   c) Que vaut la dérivée de F en 2 ? Simplifier votre réponse au maximum.

2. On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\right)$.
   a) Déterminer son domaine de définition, d'infinie dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-3,1)$.

3. Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-1,4[\times]1,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x^2+y, 4x^2+y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

4. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes
   a) $I = \displaystyle\int_0^9 \left(\int_{\sqrt{x}}^3 x\cos(y^5)\,dy\right)dx$
   b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



   c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$ si $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$
   d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^3 \frac{e^{-(y+1)x}}{9+y^2}\,dy\right)dx$

Calcul matriciel

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 4 \end{pmatrix}$$
   Si c'est possible, calculer
   a) AB b) BA c) BC d) CB e) AC f) CA

2. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

On donne la fonction f par
$$f(x) = \mathrm{tg}(3x).$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Exercices de base sur le chapitre 1

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ \frac{1}{i} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer (si possible)
$$iA,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA, B\overline{B}.$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. QCM + justifier la réponse
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai□ Faux□
   - Le déterminant d'une matrice carrée dont les éléments sont des complexes est
     un complexe□ une matrice□ un polynôme□ aucune proposition correcte□
   - Si A et B sont des matrices carrées de même dimension qui vérifient $AB = A$, alors B est la matrice identité Vrai□ Faux□
   - Si A est une matrice qui vérifie $A = A^*$, si $c \in \mathbb{C}$ et si on pose $B = cA$, alors $B = B^*$
     Vrai□ Faux□
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M admet un inverse Vrai□ Faux□
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai□ Faux□
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
     Vrai□ Faux□
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réelsVrai□ Faux□
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai□ Faux□
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai□ Faux□

Liste 2003-2004

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ \dfrac{-1}{i^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -i+2 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iA,\ C^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB,\ CA.$$

2. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le déterminant de la matrice suivante est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}.$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elle le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai□ Faux□
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M admet un inverse Vrai□ Faux□

- Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai□ Faux□
- Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vrai□ Faux□
- Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai□ Faux□
- Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai□ Faux□
- La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai□ Faux□
- La somme de deux valeurs propres d'une même matrice est encore une valeur propre de cette matrice Vrai□ Faux□
- Si le complexe λ_0 est une valeur propre de la matrice M alors $\overline{\lambda_0}$ est une valeur propre de la matrice $\overline{M}$ Vrai□ Faux□
- Si un complexe est une valeur propre d'une matrice, alors il est aussi valeur propre de la matrice transposée Vrai□ Faux□

Liste 2004/2005

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & \frac{(1+i)^2}{i^3} \\ 0 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3i+1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$
Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.
$$\widetilde{iA},\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB.$$
2. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (resp. avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).
3. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.
$$\begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$
5. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   — Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors A est la matrice nulle ou est la matrice identité
   Vrai☐ Faux☐
   — Si M est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M vérifie aussi $\widetilde{M}M = I$
   Vrai☐ Faux☐
   — Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A(A + B) = A^2 + AB$ Vrai☐ Faux☐
   — Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A - B)\,(A + B)$
   Vrai☐ Faux☐
   — Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   — La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
   — La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   — La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit.

2.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

• On a

$$iA = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

• La matrice A est une matrice de format 2×3 tandis que B est une matrice de format 3×2. Ces matrices n'ayant pas le même format, il est impossible de les additionner.

• Puisque B est une matrice de format 3×2, $\widetilde{B}$ est de format 2×3 et peut être additionné à A, matrice de même format. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} & -1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{i} & -2 \\ 0 & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Puisque A est une matrice de format 2×3, A^* est une matrice de format 3×2 ; le produit AA^* est donc possible et donne une matrice de format 2×2. On a

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \text{ donc } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix};$$

ainsi,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

• Le produit AB est possible puisque A est de format 2×3 et B de format 3×2 ; le produit est une matrice de format 2×2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le produit BA est possible puisque B est de format 3×2 et A de format 2×3 ; le produit est une matrice de format 3×3. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de $\overline{B}$; le produit $B\overline{B}$ est donc impossible.

Exercice 2

• On a $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1.5 - (-1).(-2) = 3.$

• On a $\det\begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix} = i^2 + i^2 = -2.$

• On a

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3 \\
&= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 && \text{en développant le déterminant selon la première ligne.}
\end{aligned}$$

Exercice 3

• On a $\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x).$

• On a

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} \\
&= xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } x \text{ sur } L_1,\ y \text{ sur } L_2 \text{ et } z \text{ sur } L_3 \\
&= xyz\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2 - L_3 \\
&= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } \begin{cases} x-z \text{ sur } L_1 \\ y-z \text{ sur } L_2 \end{cases} \\
&= xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\
&= xyz(x-z)(y-z)(y+z-x-z) \\
&= xyz(x-z)(y-z)(y-x).
\end{aligned}$$

• On a $\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -x & a & 0 \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_1 \text{ par } C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+x \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \\
&= (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x \\ -x & a \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première ligne} \\
&= -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x \\ 1 & a \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1 \\
&= -x(a+x)(a+2b+x).
\end{aligned}$$

Exercice 4

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$, la matrice A est inversible. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j = 1,2)$ de A. On a $(\mathcal{A})_{1,1} = 2,\ (\mathcal{A})_{1,2} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,1} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,2} = 1$. On obtient ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{si on remplace } \ L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice inverse existe. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j = 1,2,3)$ de A. On a
$(\mathcal{A})_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\quad (\mathcal{A})_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad (\mathcal{A})_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
Ainsi, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

5.1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\ (2-\lambda) - 2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 3 ; ces valeurs propres étant simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0I)X = 0$. On a

$$(A - 0I)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 3I)X = 0$. On a

$$(A-3I)X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

La matrice A possède donc la valeur propre double 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$. On a

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme ils sont tous multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deux vecteurs propres sont toujours linéairement dépendants et donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

5.3) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0I)X = 0$. On a

$$(A-0I)X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2I)X = 0$. On a

$$(A-2I)X = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+iy=0 \\ -ix-y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow -x+iy=0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice A admet donc la valeur propre triple 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$. On a

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres sont donc toujours linéairement dépendants ; la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

5.5) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_1 \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant selon la troisième colonne} \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -1, 1 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A+I)X = 0$. On a successivement

$$(A+I)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x - y + z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2x = 0 & (1)+(2) \\ 2y - 2z = 0 & (2)-(1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A-I)X = 0$. On a successivement

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} -x - y + z = 0 & (1) \\ 3x + y - 3z = 0 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 4x - 4z = 0 & (2)+(3) \\ y = 0 & (1)+(3) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A-2I)X = 0$. On a successivement

$$(A-2I)X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais A n'est pas une matrice nulle.
- Un complexe comme somme et produit de complexes.
- Faux : si A est la matrice nulle on a l'égalité pour toute matrice B.
- Faux : $B^* = \bar{c}A$.
- Vrai : le déterminant de M est non nul.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.

REMARQUES IMPORTANTES

Lors de l'inversion et de diagonalisation de matrices, on vérifie aisément que la solution trouvée est correcte.

— Quand on a déterminé la matrice inverse d'une matrice donnée, on vérifie que le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice de départ par la matrice trouvée. On doit obtenir la matrice identité.

— Quand on a déterminé une forme diagonale Δ de la matrice de départ A et une matrice S qui y conduit, pour savoir si le résultat est correct, on doit vérifier que $S^{-1}AS = \Delta$, ce qui est équivalent à la vérification de l'égalité (bien plus simple !) $AS = S\Delta$.

2.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$iA = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3 & i \end{pmatrix}$; $A + B$ impossible car matrices de formats différents ;

$$A+\tilde{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3i \\ -i & 2 \\ -2 & 2+i \end{pmatrix};\quad AA^*=\begin{pmatrix} 8 & -2i & 2+2i \\ 2i & 1 & i \\ 2-2i & -i & 2 \end{pmatrix};\quad AB=\begin{pmatrix} -4 & 4i & 2i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & -1+2i \\ -1-5i & -1+i \end{pmatrix};\quad CB=\begin{pmatrix} 2+2i & 6 & 1+4i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix};$$

CA impossible car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exercice 2

$-7, -6, 0$.

Exercice 3

$x(x-3)$.

Exercice 4

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Première matrice : valeurs propres simples 0 et 3 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 : $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Deuxième matrice : valeur propre double 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ donc matrice non diagonalisable.

Troisième matrice : valeurs propres simples 0 et 2 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 : $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S=\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quatrième matrice : valeur propre triple 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Cinquième matrice : valeurs propres -2 (simple) et 7 (double).

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 : $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais A n'est pas une matrice nulle.
- Vrai : dans ce cas M admet un inverse.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i mais 0 n'est pas valeur propre de A.
- Vrai : si $\det(M - \lambda_0 I) = 0$ alors $\det(\overline{M} - \overline{\lambda_0} I) = 0$.
- Vrai : le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée.

2.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$$\widetilde{iA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2i & -i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix} \qquad (iB)^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -2i \\ i & -1-i \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & -3 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + \widetilde{B}$: impossible car A et $\widetilde{B}$ ne sont pas de même format.

$AA^* = \begin{pmatrix} 12 & -4-2i \\ -4+2i & 3 \end{pmatrix}$

AB : impossible car le nombre de colonnes de A (3) diffère du nombre de lignes de B (2).
BA : impossible car le nombre de colonnes de B (3) diffère du nombre de lignes de A (2).

$CB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2+6i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$

Exercice 2

Toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le premier déterminant est égal à $5 + 7i$ et le second à $\frac{7}{9}$.

Exercice 4

Le premier déterminant se factorise sous la forme $(3-x)(x+2)$ et le second sous la forme

$$-(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{2})(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}).$$

Exercice 5

Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeurs propres : 0 et 4.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 0$: $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 4$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas deux vecteurs linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice A est déjà diagonale.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : $-i$ et $2+i$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -i$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2+i$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: valeur propre : 1 (triple).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : -1 (simple) et 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -1$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice A mais A n'est ni la matrice nulle ni l'identité.
- Vrai : dans ce cas M admet un inverse.
- Faux : si A et B sont de format $m \times p$ alors $A + B$ est de format $m \times p$ mais le produit est impossible sauf si $m = p$.
- Faux : le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Faux : le déterminant de la matrice doit être non nul or il est égal au produit des valeurs propres de la matrice.
- Faux : un vecteur propre et son opposé (vecteur propre de la meme valeur propre) est le vecteur nul jamais vecteur propre.
- Faux : cf ci-dessus.
- Vrai : propriété (cf théorie).

Chapitre 3

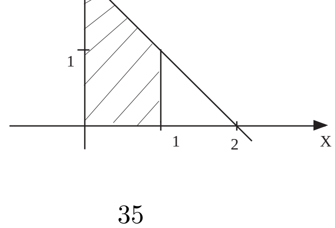
Fonctions de plusieurs variables

3.1 Exercices de base sur le chapitre 2

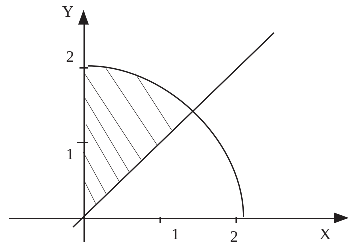
Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

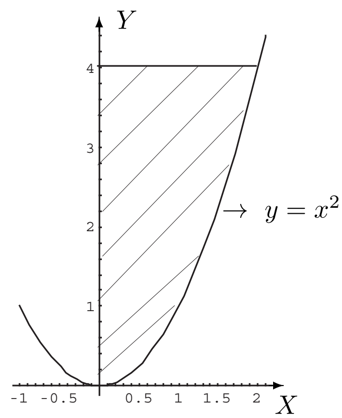
1. Quel est le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données ci-dessous ? Représenter graphiquement ces domaines.
$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \ln(x-y), \quad f_3(x,y) = \ln(|x|-|y|)$$
$$f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x,y) = \arccos(x^2+y^2), \quad f_6(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$
Calculer
$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y), \quad D_x D_y f_6(x,y).$$
2. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration.
$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\ dy\right)\ dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\ dx\right)\ dy$ et représenter l'ensemble d'intégration.
4. On considère la partie A du plan bornée par les droites d'équation $y = 2x, x = 0, y = 4$. Représenter A et calculer $\displaystyle\iint_A x\ dx\ dy$.
5. On considère la partie A du plan délimitée par l'axe X et le graphique de la fonction $\cos(x), x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Représenter A et calculer l'intégrale de $f(x,y) = 2y$ sur A.
6. Calculer $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



7. Calculer $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



8. Calculer $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\, dxdy$ où A est la partie hachurée ci-dessous



9. Si elle existe, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\, dy\right) dx$ et représenter son ensemble d'intégration.
10. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sur $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

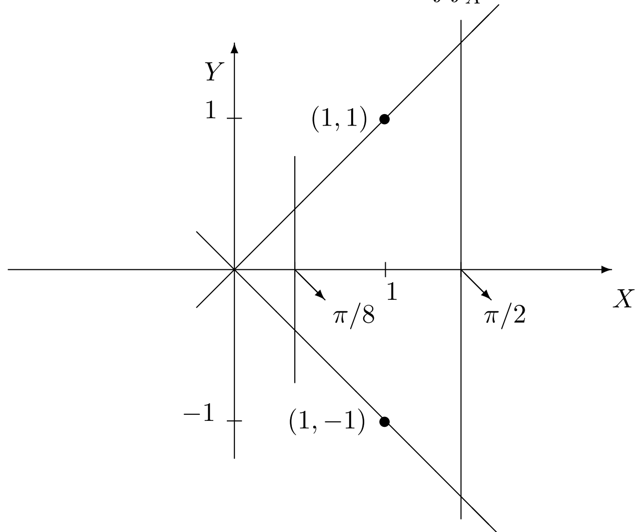
Liste 2003-2004

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad g(x,y) = \ln(|x|+|y|-1).$$
2. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles.
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = \ln\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right).$$
3. Déterminer où la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ est indéfiniment continûment dérivable et calculer
$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y).$$
4. On donne les fonctions $(r,\theta) \mapsto f(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \mapsto g(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Où ces fonctions sont-elles dérivables ? Dans cet ensemble, calculer
$$D_r f(r,\theta) D_\theta g(r,\theta) - D_\theta f(r,\theta) D_r g(r,\theta).$$

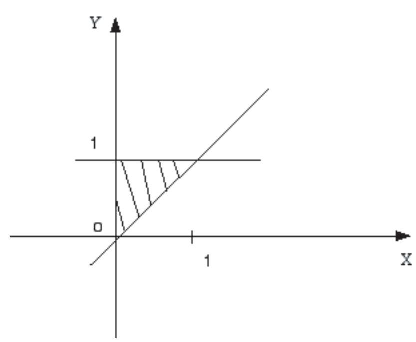
5. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les deux cas suivants

$$a)\ \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{(x+1)/2} f(x,y)dy\right)dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx\right)dy.$$

6. a) On donne l'ensemble A suivant (ensemble borné fermé), borné par les deux droites obliques et les deux droites parallèles à Y. Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A \sin(x+y)\ dxdy$ et simplifier la réponse au maximum.



b) On donne l'ensemble A suivant (ensemble hachuré, borné et fermé). Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A x\sqrt{y^2-x^2}\ dxdy$.



7. a) On donne l'ensemble $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,e], y\in[0,\ln(x)]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=y$. Représenter A. Calculer (et justifier l'intégrabilité) l'intégrale de f sur A en choisissant un ordre d'intégration. Effectuer à nouveau le calcul après avoir permuté l'ordre d'intégration.

   b) On donne $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1], x\in[y,1]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{x^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

   c) On donne $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,2], y\geq 0\}=[1,2]\times[0,+\infty[$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=ye^{-xy}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

   d) On donne l'ensemble $A=\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}, 0<y\leq 1, \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{y}}\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{yx^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

8. Représenter l'ensemble d'intégration et calculer (en justifiant)

$$\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\right)dx.$$

Liste 2004/2005

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2+9},\quad g(x,y)=\ln(|x+y|-1),\quad h(x,h)=\arcsin\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

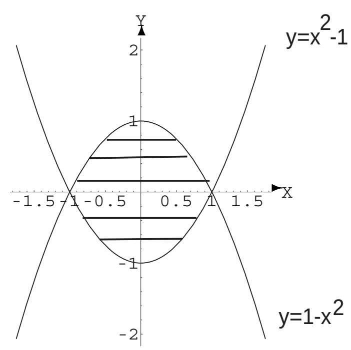
2. Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilté des fonctions f,g données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f, les dérivées partielles premières de h et $|x|D_xg(x,y)+|y|D_yg(x,y)$.

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2}),\quad g(x,y)=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right),\quad h(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y+1}).$$

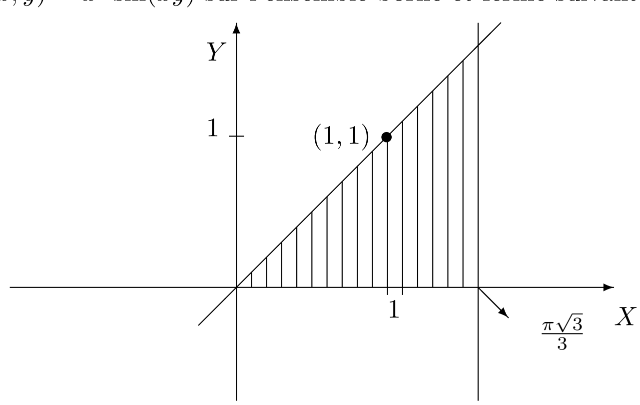
3. On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction $F\ :\ t\mapsto f(\ln(t),e-e^t)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.
4. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a)\ \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{-x/2}f(x,y)dy\right)dx,\qquad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{-3x-4}^{0}f(x,y)dy\right)dx\quad c)\ \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dx\right)dy.$$

5. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=y^2\sin(xy)$ sur $A=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.
   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur $A=\{(x,y)\ :\ 0\leq y\leq\inf\{x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.
6. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=xe^y$ sur l'ensemble borné fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ sur l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



7. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx,\ b) \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{e^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx,$$

$$c) \int_0^{1}\left(\int_y^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dx\right)dy,\ d) \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

8. Calculer l'intégrale de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ sur $A=\{(x,y): x\geq 0, y\leq 0, x^2+y^2\leq 4\}$.
9. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement $1, 2$, centrés à l'origine et l'axe X. Calculer l'intégrale de $f(x,y)=1+3x+8y^2$ sur A.

3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

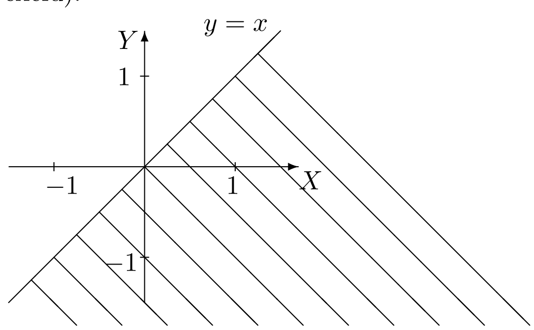
Exercice 1

• La fonction $(x,y)\mapsto f_1(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ est définie et dérivable sur

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1-(x^2+y^2)>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}$$

qui est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 (bord exclu).

• La fonction $(x,y)\mapsto f_2(x,y)=\ln(x-y)$ est définie et dérivable sur $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x-y>0\}$ qui est l'ensemble hachuré ci-dessous (bord exclu).



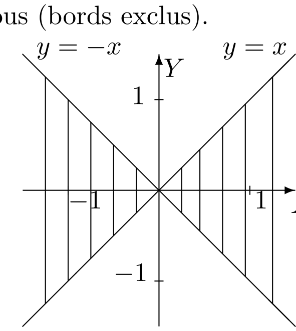
• La fonction $(x,y)\mapsto f_3(x,y)=\ln(|x|-|y|)$ est définie sur

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|-|y|>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|>|y|\}.$$

L'analyse de cette condition donne

$$|y|<|x|\Leftrightarrow -|x|<y<|x|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x<y<x \text{ si } x\geq 0\\ x<y<-x \text{ si } x\leq 0\end{array}\right. ;$$

A est donc l'ensemble hachuré ci-dessous (bords exclus).



Pour déterminer le domaine de dérivabilité, il faut tenir compte du fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en zéro et que la fonction $X \mapsto \ln(X)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Ainsi f_3 est dérivable sur

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ x \neq 0 \text{ et } \ y \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ y \neq 0\}.$$

• La fonction $(x, y) \mapsto f_4(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; elle est dérivable sur

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

.

• La fonction $(x, y) \mapsto f_5(x, y) = \text{arcos}(x^2 + y^2)$ est définie sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ et dérivable sur $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y^2 < 1\}$. Comme $x^2 + y^2 \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1, le bord étant compris ; pour l'ensemble B, le bord est donc exclu.

• La fonction$(x, y) \mapsto f_6(x, y) = \text{arctg}(\frac{x}{y})$ est définie et dérivable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, ensemble des points du plan dont on exclut ceux de l'axe des abscisses.
Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f_6 par rapport à x puis par rapport à y. On a

$$D_x f_6(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} . \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2} \, ; \qquad D_x^2 f_6(x, y) = \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$D_y f_6(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} . (\frac{-x}{y^2}) = \frac{-x}{y^2 + x^2} \, ; \qquad D_y^2 f_6(x, y) = \frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Dès lors,

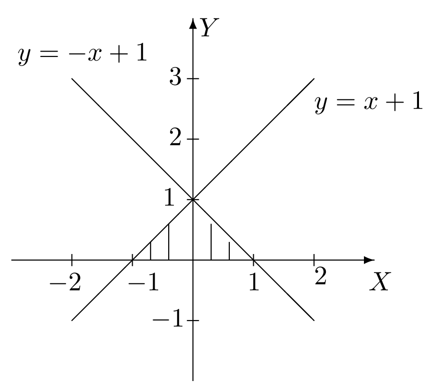
$$D_x^2 f_6(x, y) + D_y^2 f_6(x, y) = \frac{-2xy + 2xy}{(y^2 + x^2)^2} = 0.$$

Enfin,

$$D_x D_y f_6(x, y) = D_x \left[\frac{-x}{y^2 + x^2} \right] = \frac{-y^2 - x^2 + 2x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Exercice 2

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in [y - 1, 1 - y]\}$; il se représente de la façon suivante



Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

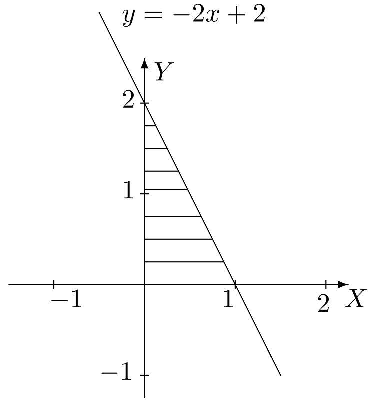
Comme on peut aussi décrire cet ensemble par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [0, x + 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, -x + 1]\},$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_0^1\left(\int_0^{-x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,-2x+2]\}$; il se représente de la façon suivante



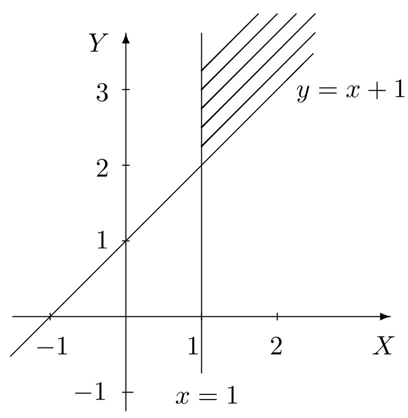
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], x \in [0, 1-\frac{y}{2}]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,+\infty[, y \in [x+1,+\infty[\}$; il se représente de la façon suivante



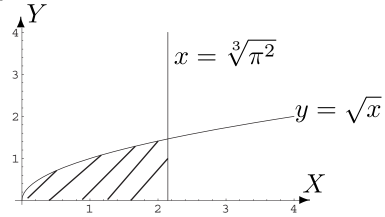
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty}\left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2,+\infty], x \in [1, y-1]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^{+\infty}\left(\int_1^{y-1} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Exercice 3
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \sqrt[3]{\pi}], x \in [y^2, \sqrt[3]{\pi^2}]\}$; il se représente de la façon suivante



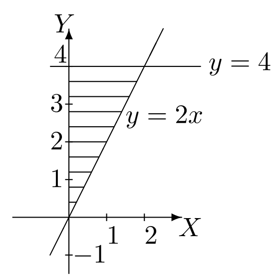
Comme la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(\sqrt{x^3})$ y est continue, elle y est intégrable et on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\,dx \right) dy.$$

Pour faciliter les calculs, permutons l'ordre d'intégration.
Puisque A peut aussi être décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt[3]{\pi^2}], y \in [0, \sqrt{x}]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x^3})\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \frac{2}{3} D(\sqrt{x^3})\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{x^3}) \right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos(\pi) + \frac{2}{3}\cos(0) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

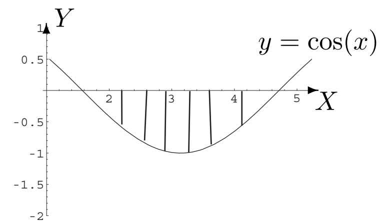
Exercice 4
Considérons la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [2x, 4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x$ est continue sur A, donc intégrable sur A. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{2x}^4 x\,dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \Big[xy \Big]_{y=2x}^{y=4} dx \\
&= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], y \in [\cos(x), 0]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = 2y$ est continue sur A, donc intégrable sur A. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_{\cos(x)}^{0} 2y\,dy \right) dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[y^2 \right]_{\cos(x)}^{0} dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+\cos(2x))\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\pi)) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi)) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, 2-x]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x+y$ est continue, donc intégrable sur A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-x} (x+y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + 2 \right) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 7
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{2}], y \in [x, \sqrt{4-x^2}]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est continue, donc intégrable sur A. Si on travaille en coordonnées polaires, cet ensemble, privé de l'origine, est décrit par $A' = \{(r,\theta) \in]0,2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$; dans ces conditions,

on a $f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{r^2} = r$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta\right) dr \\
&= \int_0^2 r^2\,dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 . \frac{\pi}{4} = \frac{8}{3}.\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

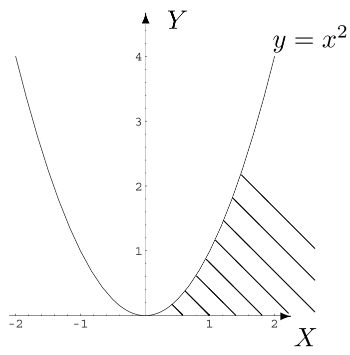
Exercice 8

L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [x^2,4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ est continue, donc intégrable sur$A$. L'ensemble A peut aussi être décrit sous la forme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,4], x \in [0,\sqrt{y}]\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\right) dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2\sqrt{1+y^2}}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx \\
&= \int_0^4 \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 D(1+y^2).\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{1+y^2}\right]_0^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).
\end{aligned}$$

Exercice 9

La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y \neq 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous.



Etudions l'intégabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.

Pour x fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ est continue sur le fermé borné $[0,x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy = \left[xe^{-x^2}\ln(x^2+y)\right]_0^{x^2} = xe^{-x^2}(\ln(2x^2) - \ln(x^2)) = xe^{-x^2}\ln(2).$$

Etudions l'intégrabilité de la fonction $h : x \mapsto xe^{-x^2}\ln(2)$ continue sur $[0,+\infty[$. Comme h est continu sur

$[0, t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\int_0^t xe^{-x^2} \ln(2)\ dx = -\frac{\ln(2)}{2} \int_0^t -2xe^{-x^2}\ dx = -\frac{\ln(2)}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^t = -\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2} - 1).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2} - 1) \right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

puisque $\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 0$ par application du théorème de la limite des fonctions composées.
Comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme la fonction f est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2 + y}\ dy \right)\ dx = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 10
La fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est une fonction à variables séparées et l'ensemble d'intégration A se présente aussi sous la forme d'un produit cartésien d'intervalles :

$$f(x, y) = g_1(x).g_2(y) \quad x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, +\infty[, \quad g_1 = g_2 : t \mapsto e^{-t^2}.$$

Le calcul de l'intégrale de cette fonction sur A est traité dans les notes de cours et effectué au cours.

3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

dom $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0\}$, ensemble des points du plan intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 2 ("bord" exclu).
dom $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs au carré ayant pour sommets les points de coordonnées $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ et $(0, -1)$ ("bords" exclus).

Exercice 2

Domaine de définition et de dérivabilité $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ensemble de tous les points du plan excepté l'origine.
$D_x f(x, y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $D_y f(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Domaine de définition et de dérivabilité $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs à l'ellipse centrée à l'origine et dont les sommets sont les points de coordonnées $(1, 0), (0, 2), (-1, 0)$ et $(0, -2)$ ("bord" exclu).
$D_x f(x, y) = \frac{2x}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}$ $\qquad$ $D_y f(x, y) = \frac{y}{2\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)}$.

Exercice 3

Fonction indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y) = 0$.

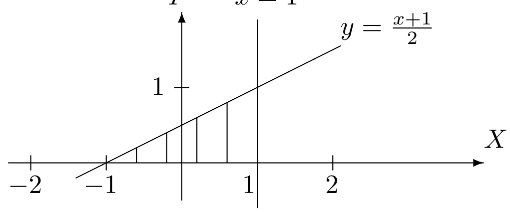
Exercice 4

Fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$; $D_r f(r, \theta) D_\theta g(r, \theta) - D_\theta f(r, \theta) D_r g(r, \theta) = r$.

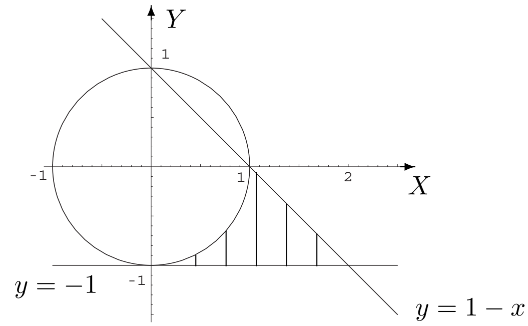
Exercice 5

Les ensembles d'intégration sont les parties hachurées du plan.

a) $\int_0^1 (\int_{2y-1}^1 f(x, y)dx)dy$



b) $\int_0^1 (\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy)dx + \int_1^2 (\int_{-1}^{1-x} f(x,y)dy)dx$



Exercice 6

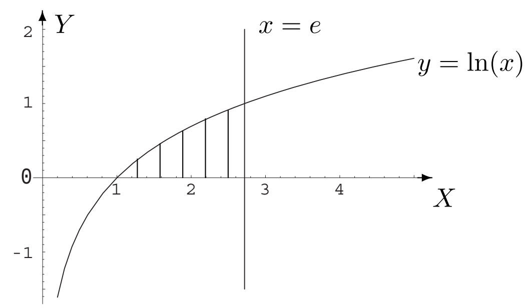
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{3\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{12}$.

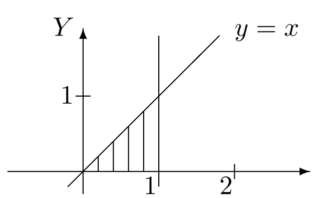
Exercice 7

A est l'ensemble hachuré.

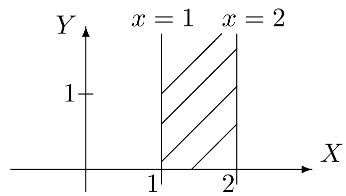
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{e}{2} - 1$.



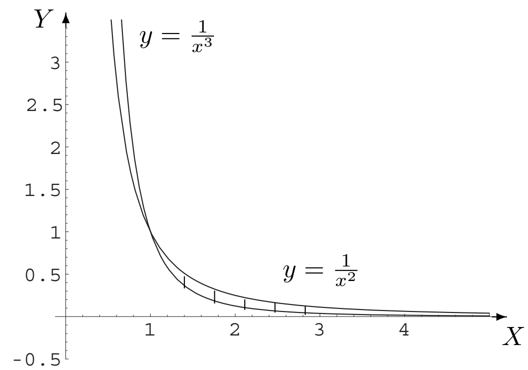
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{2}(e-1)$.



c) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,2]$, la fonction $y \mapsto ye^{-xy}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim\limits_{y\to+\infty} (y^2 \,.\, ye^{-xy}) = 0$. De plus, $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dy = \frac{1}{x^2}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur le fermé borné $[1,2]$ donc intégrable. L'intégrale donnée vaut $\frac{1}{2}$.



d) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $y \mapsto e^{yx^2}$ est continue sur le fermé borné $[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}]$ donc intégrable et on a $\int_{\frac{1}{x^3}}^{\frac{1}{x^2}} e^{yx^2} dy = \frac{1}{x^2}(e - e^{\frac{1}{x}})$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}(e - e^{\frac{1}{x}})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\left(e - e^{\frac{1}{x}}\right)\right) = e - 1$. L'intégrale donnée vaut 1.



Exercice 8

L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points situés dans le quatrième quadrant, intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}(1 - \frac{2}{e})$.

3.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

— dom $(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 9 \geq 0\}$: ensemble des points situés entre les branches de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 + 9 = 0$ ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,3)$ et $(0,-3)$, les points de la courbe étant compris.

— dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| - 1 > 0\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $x + y = 1$ et $x + y = -1$, les points des droites étant exclus.

— dom $(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \geq 1\}$: même ensemble de points que pour g mais les points des droites sont inclus.

Exercice 2

— Pour f, les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ensemble des points du plan dont on exclut l'origine. On a

$$D_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D_x^2 f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_y^2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_x D_y f(x,y) = D_y D_x f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

— Pour g, dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ tandis que le domaine d'infinie dérivabilité est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$. Le domaine de définition de g est l'ensemble des points situés entre les droites d'équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$ et comprenant notamment les points de coordonnées

$(0,1)$ et $(0,-1)$, les points des droites étant inclus mais non le point de coordonnées $(0,0)$; pour le domaine d'infinie dérivabilité, les points des droites sont exclus. On a

$$|x|D_xg(x,y)+|y|D_yg(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy>0 \\ \frac{-2x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad xy<0 \end{cases}$$

— Pour h, les deux domaines sont égaux à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y+1>0\}$: ensemble des points extérieurs à la parabole d'équation $y=-x^2-1$, les points de la courbe étant exclus. On a

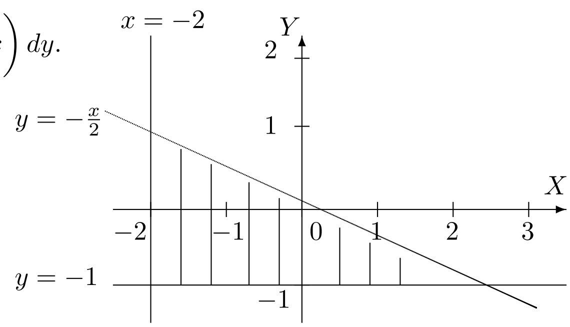
$$D_xh(x,y)=\frac{x}{x^2+y+1} \qquad D_yh(x,y)=\frac{1}{2(x^2+y+1)}.$$

Exercice 3

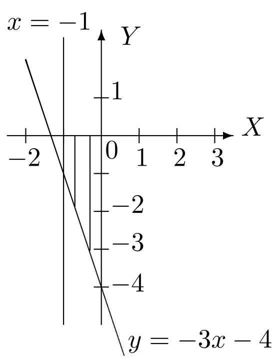
La fonction F est dérivable sur $]\frac{1}{e},1[$ et on a $DF(t)=(D_1f)_{(f_1,f_2)}\cdot\frac{1}{t}-(D_2f)_{(f_1,f_2)}\cdot e^t$.

Exercice 4

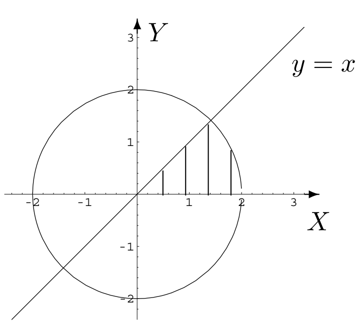
a) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y)\,dx\right)dy$.



b) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-\frac{y+4}{3}}^{0} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\,dx\right)dy$.



c) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$.



Exercice 5

a) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi^2}$ b) L'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}$.

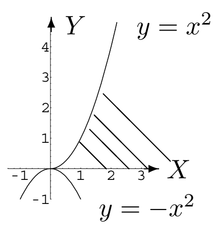
Exercice 6

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [-1 + x^2, -x^2 + 1]$ et l'intégrale vaut 0.

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}\right], y \in [0, x]\right\}$ et l'intégrale vaut $\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi^2}{3}\right)$.

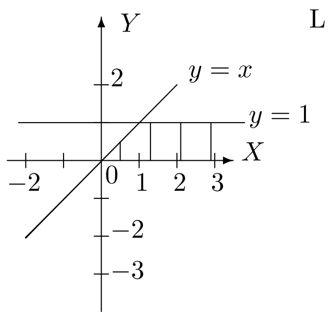
Exercice 7

a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.

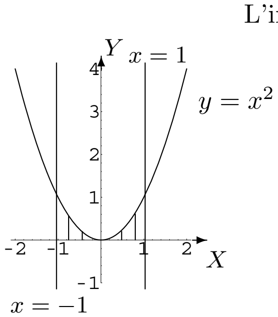


b) L'ensemble d'intégration est le même que ci-dessus et l'intégrale vaut $\dfrac{\ln(2)}{2}\sqrt{\pi}$.

c) L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.



d) L'intégrale vaut $2\ln(2) - 2$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré.



Exercice 8

L'intégrale vaut $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 9

L'intégrale vaut $\frac{33\pi}{2}$.

Chapitre 4

Approximations polynomiales

4.1 Exercices de base sur le chapitre 3

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n au point x_0 pour chacune des fonctions données ci-dessous.

   $f(x) = x\sin(x), n = 3, x_0 = 0,\qquad f(x) = \sqrt{1+x}, n = 2, x_0 = 0,\qquad f(x) = \ln(x+1), n = 3, x_0 = 0$
   $f(x) = \ln(x), n = 2, x_0 = 2$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.
3. a) Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

   $$i,\quad 1+i,\quad \frac{1}{i}.$$

   b) Déterminer les racines quatrièmes du complexe -1. Représenter ces racines.

Liste 2003/2004

1. Déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants.

   $$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^2\cos(x),\ x_0 = 0, n = 4 & f_2(x) = \mathrm{tg}(x),\ x_0 = \pi, n = 4 \\ f_3(x) = \mathrm{tg}(x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}, n = 3 & f_4(x) = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 0, n = 2 \\ f_5(x) = \ln(1-x^2),\ x_0 = 0, n = 2 & f_6(x) = x\ \mathrm{arcos}(x),\ x_0 = 0, n = 2 \end{array}$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Déterminer les racines cubiques du complexe -2 et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines cubiques du complexe $1+i$ et du complexe $-i$. En donner une représentation géométrique.

Liste 2004/2005

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction donnée explicitement.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 & f_2(x) = xe^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2 & f_4(x) = \mathrm{arctg}(x),\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\ f_5(x) = \ln(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2, 3 & f_6(x) = (1+x)^3,\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

   Représenter f_3 et son approximation à l'ordre 2 en 0.

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Déterminer les racines cubiques du complexe i et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines quatrièmes du complexe -16. En donner une représentation géométrique. Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes du complexe $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$. En donner la représentation géométrique.
5. — L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
   □ un polynôme de degré 3
   □ une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
   □ un nombre réel plus petit ou égal à 3
   □ une fonction
   □ aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— La fonction $x \mapsto f(x) = x\sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = \sin(x) + x\cos(x),\ D^2f(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),\ D^3f(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 2, \quad D^3f(0) = 0.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x^2.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 1, \quad Df(0) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(0) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = (x+1)^{-1},\ D^2f(x) = -(x+1)^{-2},\ D^3f(x) = 2(x+1)^{-3}$$

sur $]-1,+\infty[$, donc

$$f(0)=0,\quad Df(0)=1,\quad D^2f(0)=-1,\quad D^3f(0)=2.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x)=f(0)+x\ Df(0)+\frac{x^2}{2}\ D^2f(0)+\frac{x^3}{6}\ D^3f(0)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

— La fonction $x\mapsto f(x)=\ln(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$Df(x)=x^{-1},\quad D^2f(x)=-x^{-2}$$

sur $]0,+\infty[$, donc

$$f(2)=\ln(2),\quad Df(2)=\frac{1}{2},\quad D^2f(2)=-\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x-2)=f(2)+(x-2)\ Df(2)+\frac{(x-2)^2}{2}\ D^2f(2)=\ \ln(2)+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}.$$

Exercice 2

La fonction $x\mapsto f(x)=\sin(x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vu le développement limité de Taylor, on sait que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 est $R_2(x)=\dfrac{x^3}{6}D^3f(u_0)$, $x\in\mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x. Puisque $Df(x)=\cos(x)$, $D^2f(x)=-\sin(x)$ et $D^3f(x)=-\cos(x)$, on a

$$R_2(x)=-\frac{x^3}{6}\cos(u_0)\qquad\text{et}\qquad|R_2(x)|\le\frac{|x|^3}{6},\ x\in\mathbb{R}.$$

De même, le reste de l'approximation à l'ordre 3 est $R_3(x)=\dfrac{x^4}{24}\ D^4f(u_0)=\dfrac{x^4}{24}\ \sin(u_0)$, $x\in\mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x puisque $D^4f(x)=\sin(x)$. Mais comme l'approximation de la fonction sinus à l'ordre 4 est la même que l'approximation à l'ordre 3, en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$R_3(x)=R_4(x)=\frac{x^5}{120}D^5f(u_0)=\frac{x^5}{120}\cos(u_0)\qquad\text{et}\qquad|R_3(x)|\le\frac{|x|^5}{120},\ x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3

a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

— La forme trigonométrique de i est $e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $i=0+i\ .\ 1$ et donc $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$. De plus, comme $\cos(\theta)=0$ et $\sin(\theta)=1$ avec $\theta\in[0,2\pi[$, on a $\theta=\frac{\pi}{2}$.

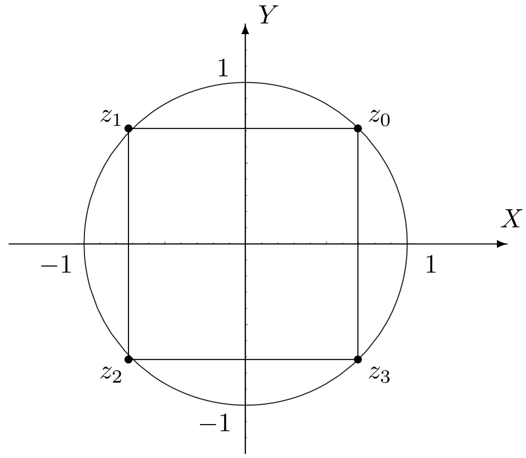
— Considérons $z=1+i$; on a $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et, dès lors, $z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ainsi, $\cos(\theta)=\sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\theta\in[0,2\pi[$, ce qui donne $\theta=\frac{\pi}{4}$. Pour conclure, la forme trigonométrique de $1+i$ est donc $\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$.

— Le complexe $\frac{1}{i}=-i$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ puisque $r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$, $\cos(\theta)=0$ et $\sin(\theta)=-1$ avec $\theta\in[0,2\pi[$.

b) La forme trigonométrique de -1 est $e^{i\pi}$. Ainsi, ses racines quatrièmes sont données par $z_k=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ avec $k=0,1,2,3$. Dès lors, on a

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}\ \text{et}\ z_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Ces racines quatrièmes se représentent sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 et sont les sommets d'un carré, points communs au cercle et aux droites d'équation $y=x$ et $y=-x$.



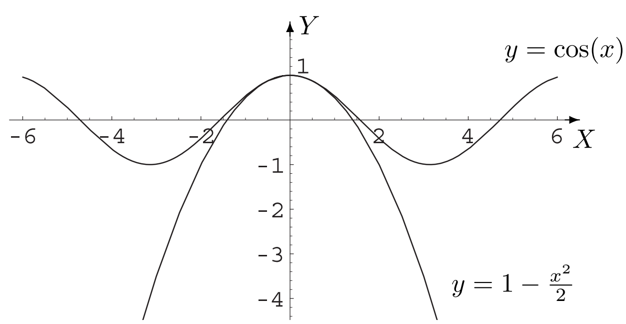
4.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$f_1 : P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{2},\ x \in \mathbb{R}$.
$f_2 : P_4(x-\pi) = x - \pi + \frac{(x-\pi)^3}{3},\ x \in \,]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
$f_3 : P_3(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3,\ x \in \,] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
$f_4 : P_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2},\ x \in \,] - \frac{1}{2}, +\infty[$.
$f_5 : P_2(x) = -x^2,\ x \in \,] - 1, 1[$.
$f_6 : P_2(x) = \frac{\pi}{2}x - x^2,\ x \in \,] - 1, 1[$.

Exercice 2

$R_2(x) = \frac{x^3}{6}\sin(u)$ avec u strictement compris entre 0 et x ; on a donc $|R_2(x)| \leq \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

$z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[3]{2}$.
Un des sommets appartient à l'axe des X, son abscisse étant négative.

Exercice 4

Pour $1 + i$: $z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

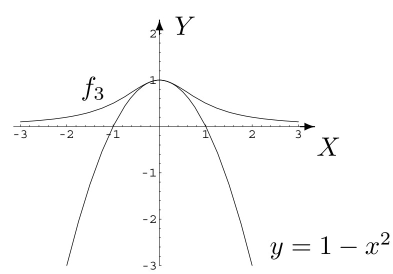
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[6]{2}$. Un des sommets appartient à la deuxième bissectrice et est situe dans le second quadrant.

Pour $-i$: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Un des sommets appartient à l'axe des Y, son ordonnée étant positive.

4.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

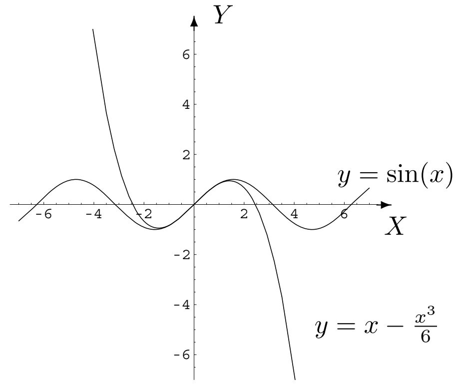
	$P_0(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$	$P_2(x-x_0)$	$P_3(x-x_0)$	$P_4(x-x_0)$
f_1	1	$1-2x$	$1-2x+2x^2$	$1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_2	0	x	$x-2x^2$	$x-2x^2+2x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_3	1	1	$1-x^2, x\in\mathbb{R}$		
f_4	0	x	x	$x-\frac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$	
f_5	0	$x-1$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}, x\in]0,+\infty[$	
f_6	1	$1+3x$	$1+3x+3x^2$	$1+3x+3x^2+x^3$	$1+3x+3x^2+x^3, x\in\mathbb{R}$



Exercice 2

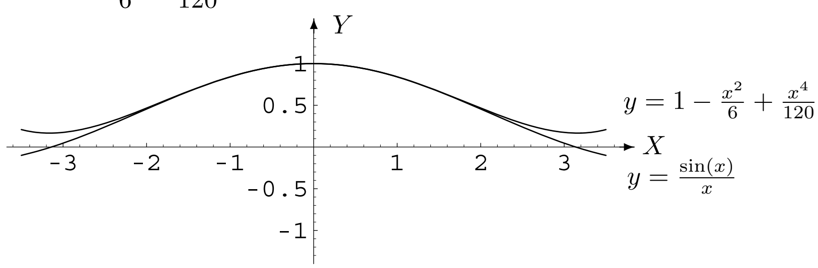
$R_4(x) = \cos(u_0)\dfrac{x^5}{5!}$ avec u_0 strictement compris entre 0 et x.

Approximation : $P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{6}, x\in\mathbb{R}$.



$R_4(x) = \dfrac{x^5}{5\,!}(u_0^5 \cos(u_0) - 5\ u_0^4 \sin(u_0) - 20\ u_0^3 \cos(u_0) + 60\ u_0^2 \sin(u_0) + 120\ u_0 \cos(u_0) - 120\ \sin(u_0))\ .\ u_0^{-6}$
avec u_0 strictement compris entre 0 et x.

Approximation : $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120}, x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

Les racines cubiques de i sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Ce sont les sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont le sommet correspondant à z_2 est le point de coordonnées $(0, -1)$.

Exercice 4

Les racines quatrièmes de -16 sont $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 2, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Les racines carrées de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ce sont les points diamétralement opposés du cercle trigonométrique dont l'un a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
Les racines quatrièmes de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle trigonométrique, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 5

une fonction.

Année académique 2020-2021

Mathématiques générales II
CORRECTION DES LISTES D'EXERCICES

Version 31 août 2020

Chapitre 5

Correction des exercices

Liste 1 : calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & -3i \\ -i & 2 & 5+4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} -4-4i & 1-5i \\ 8-i & 7+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} -1-4i & \frac{1-11i}{2} \\ 8+i & \frac{21+25i}{3} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} -6 & -2+2i & 4i \\ 12-i & 5-4i & 3-4i \\ -5i & 1-i & 4+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 7 & \frac{-11-9i}{6} \\ 3+5i & \frac{-2i}{3} \\ 8+12i & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1-i}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -3i & 1 \\ 1-i & -i \\ 2 & -4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 2$, $\forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 5A + 6I = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**

   La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a \end{pmatrix}$ $(a, c \in \mathbb{C})$.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de A vaut $\frac{3}{2}(2+i)$, celui de B vaut -10, celui de C vaut 40 et celui de D vaut -16.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3+x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de A est égal à $(2-x)(x+4)$; celui de B est égal à $(-x+1+2i)(x-1+2i)$, celui de C vaut$(x+3i)(x-3i)$ et celui de D vaut $(x-1)^2(x+4)$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à la transposée de C .
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{-2-i}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-2+i$ et $2+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont -3, 2 et 5 ; ces valeurs propres sont simples.
Les valeurs propres de la matrice C sont $\frac{1-\sqrt{65}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{65}}{2}$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce résultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -5 et 8 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -5 sont du type $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 8 sont du type $c'\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -5 & 40 \end{pmatrix}$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$. Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 2 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 9\\6 & 1\end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**
   (b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**
   (c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

   (a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix}N_1\\P_1\\S_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\P_0\\S_0\end{pmatrix}$$

   et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

   (c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix}0,4\\0,4\\0,2\end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige, 4 chances sur 10 qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 75 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 20.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 1 fois sur 2 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

(a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**

(b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

(a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 27 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
(b) A longue échéance, le lapin a 48 % (40 sur 83) de chance de manger des carottes, 18 % (15 sur 83) de chance de manger des pissenlits et 34 % (28 sur 83) de chance de manger de la salade.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

— **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

— **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

— **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$
C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Vrai ou faux (Justifier)**

(a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la deuxième ligne de AB est le vecteur nul alors que la deuxième ligne de BA a pour premier élément d.

(b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0.

(c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie)

(d) **Si deux colonnes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.**
Vrai (cf. théorie)

(e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(4A) = 4 \det A$.**
Faux : $\det(4A) = 4^3 \det A = 64 \det A$

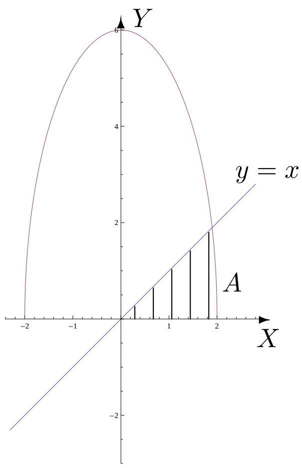
(f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la colonne 2 de A par 4, alors $\det B = 4 \det A$.**
Vrai (cf. théorie)

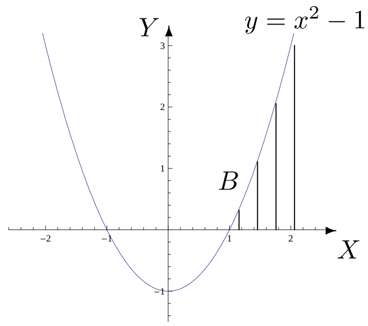
Liste 3 : compléments

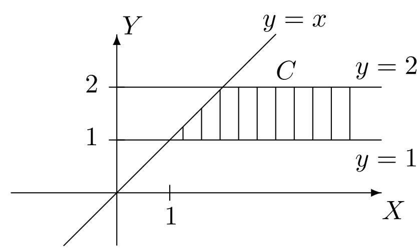
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

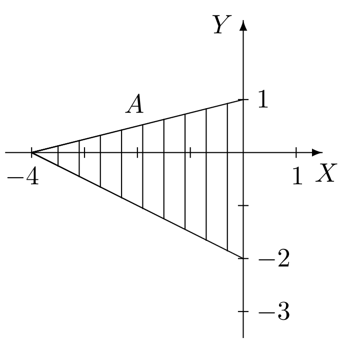
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36 - 9x^2}\}\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1,2]\}$

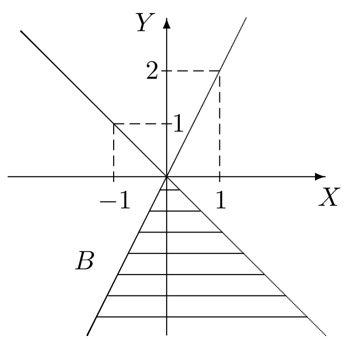


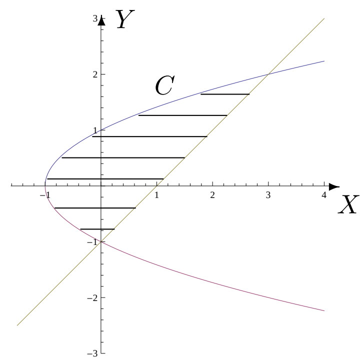




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.





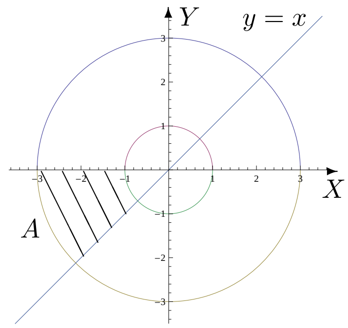


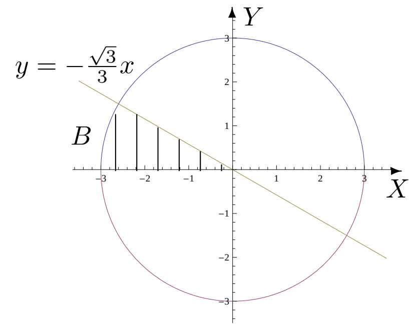
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{x}{2} - 2, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 0],\ x \in [-2(y+2), 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in]-\infty, 2x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in]-\infty, -x]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0],\ x \in [\ \frac{y}{2}, -y]\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-\sqrt{x+1}, \sqrt{x+1}]\}$
$\cup\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3],\ y \in [x-1, \sqrt{x+1}]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 2],\ x \in [y^2 - 1, y + 1]\}.$

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble A mais non dans B.**





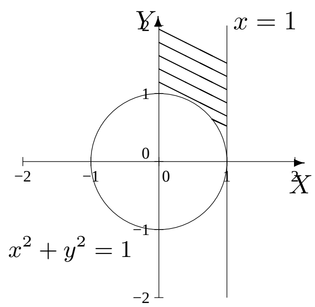
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r, \theta) : r \in [1, 3],\ \theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 3[,\ \theta \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r, \theta) : \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ r \in \left]1, \frac{1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 9|$ et $x_0 = 2$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ et $x_0 = 3$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 2 vaut -4 et celle de g en 3 vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2, 2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2 - 1})$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $]-\sqrt{5}, -1[\, \cup\,]1, \sqrt{5}[$ et sa dérivée vaut

$$DF(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}(Df)(\sqrt{x^2 - 1}).$$

   b) Même question pour g dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x - 1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ et sa dérivée vaut

$$DG(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2 + 6x}}(Dg)(\arcsin(3x - 1)).$$

III. Calcul intégral

1. **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2\cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$.

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\ln 2\ .\ e^{a^2}$.

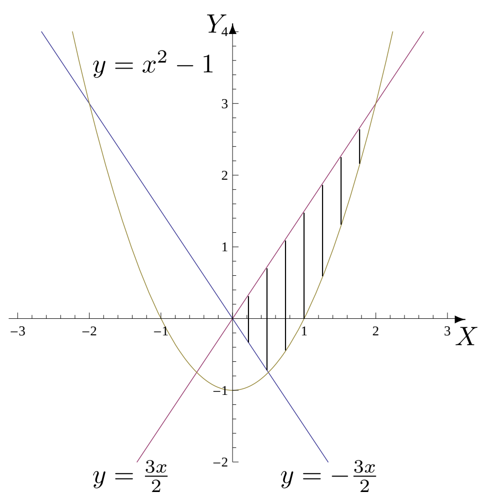
   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur $]a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ mais non en a^+. Cette fonction n'est donc pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**

   $$a)\int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b)\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\ dx$$

   Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut 0 et la deuxième $\frac{\pi}{8}$.

3. **On considère l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{3x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2},\ y \geq x^2-1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
   L'aire de la région hachurée vaut $\frac{33}{16}$.



IV. Divers

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

   $$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A-0,78).0,22}$$

   Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5-x)(0,25-x)}$$

Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à $17\ \%$ de la quantité initiale.**
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
b) L'arbuste a 14 644 ans.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

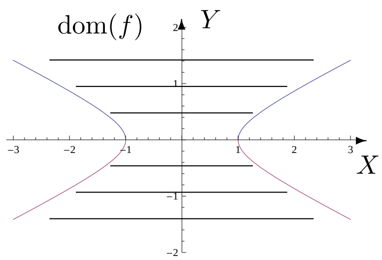
I. Définitions et représentations graphiques

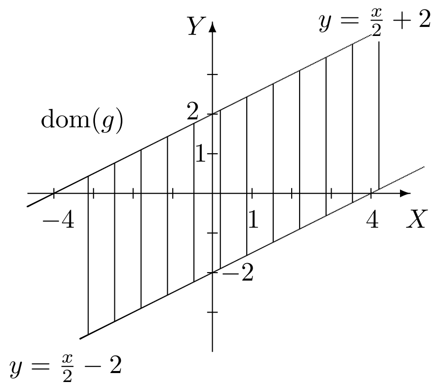
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

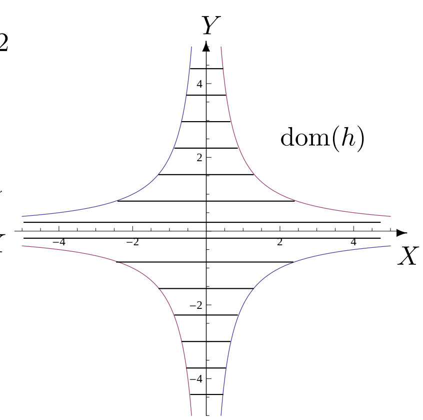
$$f(x,y) = \ln\left(4y^2 - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{4 - |x - 2y|}, \quad h(x,y) = \text{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$

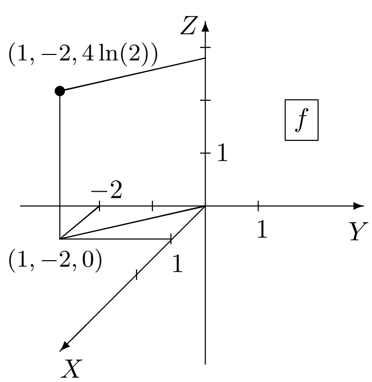
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1, -2,)$ **par** f**, de** $(5,3)$ **par** g **et de** $(-1,1)$ **par** h**. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.**

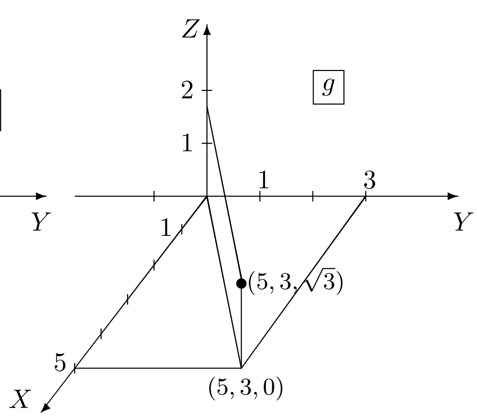
Les domaines de définition sont les suivants :
• $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1,-2)$ appartient à $\text{dom}(f)$, on a $f(1,-2) = 4\ln(2)$.
• $\text{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x - 2y \leq 4\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(5,3)$ appartient à $\text{dom}(g)$, on a $g(5,3) = \sqrt{3}$.
• $\text{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq xy \leq 2\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(-1,1)$ appartient à $\text{dom}(h)$, on a $h(-1,1) = \frac{2\pi}{3}$.

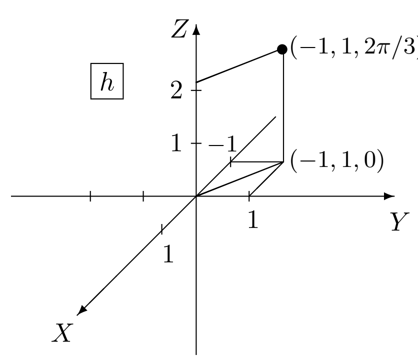




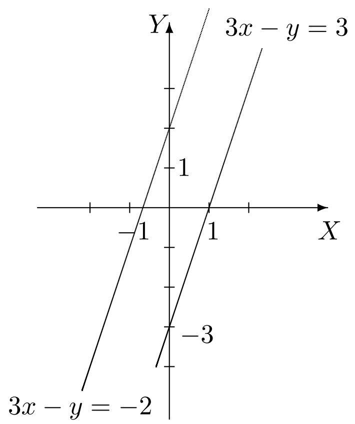


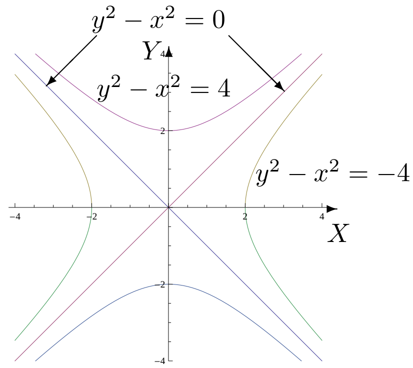


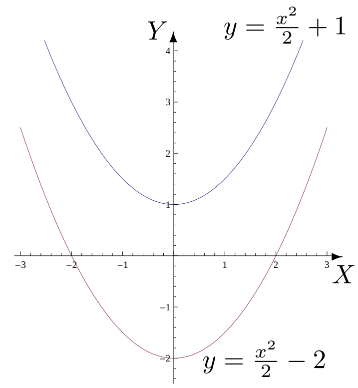




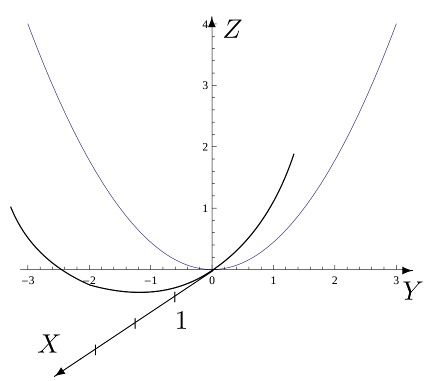
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y)=c$ si**
   a) $f(x,y)=3x-y$ et $c=-2,\ 3$
   b) $f(x,y)=y^2-x^2$ et $c=-4,\ 0,\ 4$
   c) $f(x,y)=x^2-2y$ et $c=-2,\ 4$





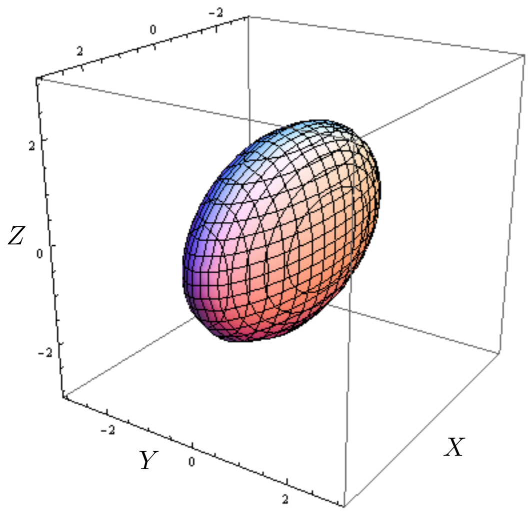


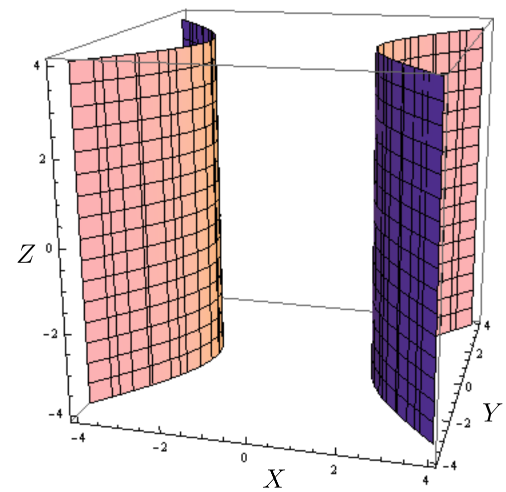
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X,Y,Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+4y^2=9z$ dans le plan d'équation $x=0$ puis dans celui d'équation $y=0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
   La trace dans le plan d'équation $x=0$ est une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z ; celle dans le plan d'équation $y=0$ est aussi une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z (cf. graphique).
   Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\ \frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \qquad\qquad b)\ x^2-y^2=4.$$





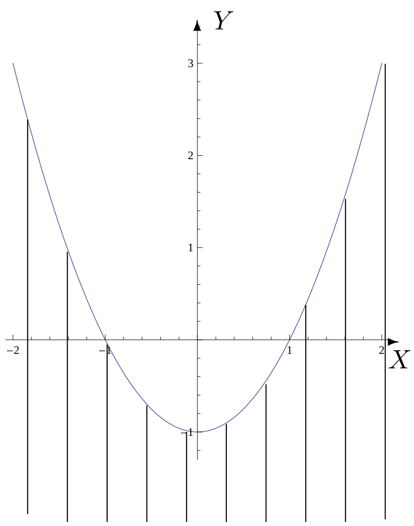
II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 2x^3+xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
   La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut 10.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2-1-y), \quad g(x,y) = \sin(x^3y^2+3y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = y^2\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

   a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-1-y > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2-1-y}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{-1}{x^2-1-y}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = 3x^2y^2\cos(x^3y^2+3y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = (2x^3y+3)\cos(x^3y^2+3y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \frac{y^3}{x^2}\, e^{-\frac{y}{x}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \left(2 - \frac{y}{x}\right) y\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2-4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 > 0\}$ et on a

$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \frac{-5(x^2+4y^2)}{(x^2-4y^2)^2}.$$

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_2^3 \sin(x_1x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = y^2 e^{x^2y\sqrt{2z}}$.
a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(x_2^3\sin(x_1x_3) + x_1\, x_2^3\, x_3\cos(x_1x_3),\ 3x_1\, x_2^2\sin(x_1x_3),\ x_1^2\, x_2^3\cos(x_1x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2xy^3\sqrt{2z}\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ (2+x^2y\sqrt{2z})y\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ \frac{x^2y^3}{\sqrt{2z}}\, e^{x^2y\sqrt{2z}}\right).$$

5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

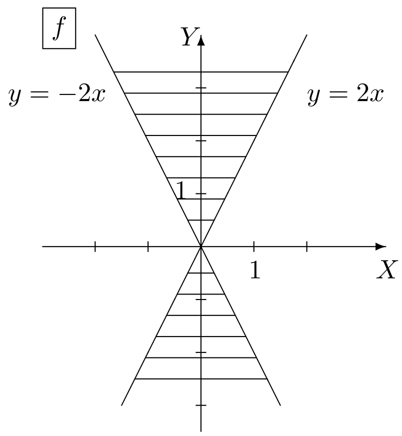
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2-y+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $\frac{|x|}{|y|} D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
a) Pour f, on a

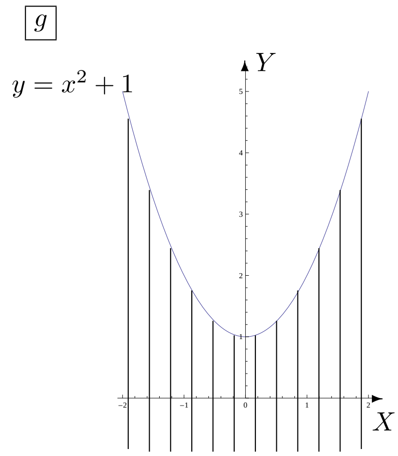
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{2x}{y} \leq 1,\ y \neq 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{2x}{y} < 1,\ y \neq 0\right\}.$$

Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 > 0\}$.

Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y)+D_yf(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad xy\geq 0 \text{ et } y\neq 0\\ \dfrac{-4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x\leq 0 \text{ et } y>0\\ \dfrac{4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x\geq 0 \text{ et } y<0\end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t)=f\left(t,\frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t)=\arcsin(2t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t)=\frac{4t}{\sqrt{1-4t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t)=g(\sin(t),\cos^2(t)$ est donnée par $G(t)=\exp(\sqrt{1-\cos(2t)})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$DG(t)=\frac{\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos(2t)}}\exp(\sqrt{1-\cos(2t)}).$$

6. **On donne la fonction $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y)=f(x,y)(D_x^2f(x,y)+D_y^2f(x,y)),\ (x,y)\in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

On a $A=\mathbb{R}^2$ et $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

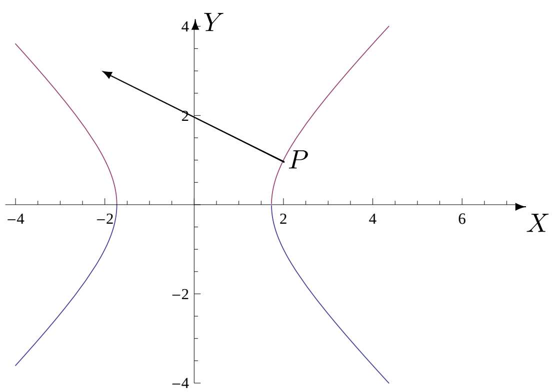
7. **On donne la fonction $f(x,y) = \cos(ax)\sin(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.**
La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

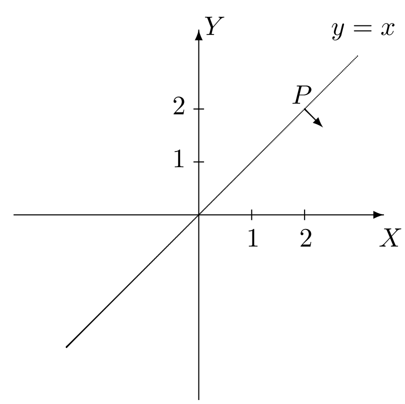
8. **L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :**
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ **et P a pour coordonnées** $(2,1)$
b) $T(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ **et P a pour coordonnées** $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

En toute généralité, le gradient de T est un vecteur qui pointe dans la direction et le sens dans lesquels T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

$$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.



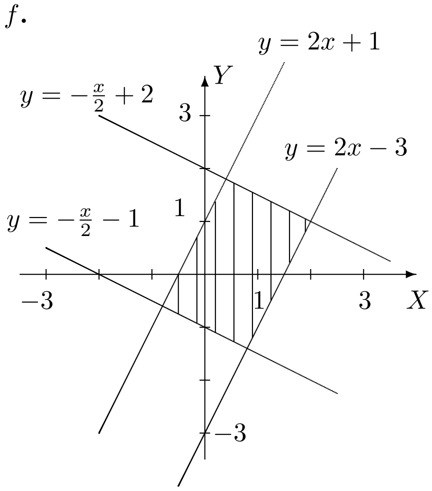


Le point $(0,0)$ n'appartient pas à l'isotherme

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

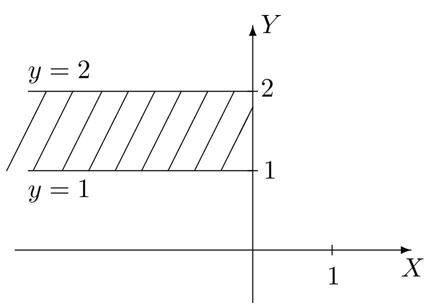
I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,3[\times]-2,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(2x-y,x+2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<2x-y<3,\ -2<x+2y<4\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont $(D_xF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).2+(D_vf)(2x-y,x+2y).1$ et $(D_yF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).(-1)+(D_vf)(2x-y,x+2y).2$ si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour la fonction g, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]\ln\frac{\pi}{6},+\infty[$ et $G(x,y)=g(\exp(2x),\ \ln(\arcsin(y/2)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\in]1,2[\}=]-\infty,0[\times]1,2[$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y)=(D_ug)(\exp(2x),\ln(\arcsin(y/2))).2\ \exp(2x)$$

$$(D_yG)(x,y)=(D_vg)(\exp(2x),\ln(\arcsin(y/2))).\left(\frac{1}{\arcsin(y/2)\sqrt{4-y^2}}\right)$$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.**

   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f: t\mapsto f(t)=g\left(\arccos\left(\frac{t}{3}\right),\frac{1}{\sqrt{t-1}},t^2-1\right)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? $3/2$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.

   a) La fonction f n'est dérivable en aucun réel.
   d) Le domaine de dérivabilité de f est $]1,2[$; f n'est donc pas dérivable en 0 mais bien en 3/2. La

dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right) \; . \; \left(\frac{-1}{\sqrt{9-t^2}}\right)$$

$$+(D_v g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{(t-1)^3}}\right) + (D_w g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)2t$$

si $u,\ v$ et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

La dérivée de f en $3/2$ vaut

$$Df(3/2) = (D_u g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right)\left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right) + (D_v g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right)\left(-\sqrt{2}\right) + (D_w g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right)3$$

si $u,\ v$ et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

3. **Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(2) = 3,\ y(2) = 5,\ (Dx)(2) = -1,\ (Dy)(2) = 4,$ $(D_x f)(3,5) = 6$ et $(D_y f)(3,5) = -2$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 2, que vaut $(DF)(2)$?**

   On a $(DF)(2) = (D_x f)(3,5).(D_t x)(2) + (D_y f)(3,5).(D_t y)(2) = -14.$

4. **Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(0,1)$ si**

$$u(0,1) = -2 \quad (D_s u)(0,1) = 2 \quad (D_t u)(0,1) = 4$$

$$v(0,1) = 5 \quad (D_s v)(0,1) = 3 \quad (D_t v)(0,1) = 6$$

   et $(D_u f)(-2,5) = -1$ et $(D_v f)(-2,5) = 8$, calculer $(D_s F)(0,1)$ et $(D_t F)(0,1)$.

   On a $(D_s F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_s u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_s v)(0,1) = 22$ et $(D_t F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_t u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_t v)(0,1) = 44$

II. Permutation de l'ordre d'intégration

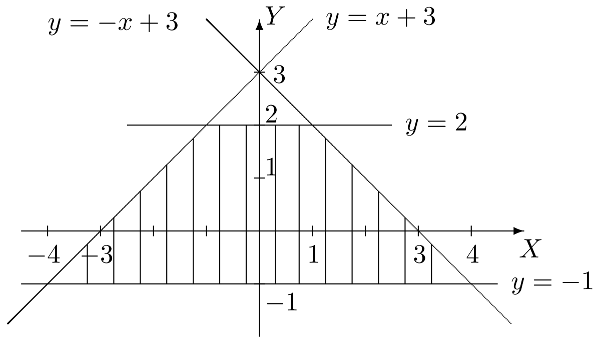
1. **Supposons que la fonction f soit intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{2}\left(\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{2}\left(\int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

   a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+3} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{2} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{1}^{4}\left(\int_{-1}^{-x+3} f(x,y)\ dy\right)dx$$

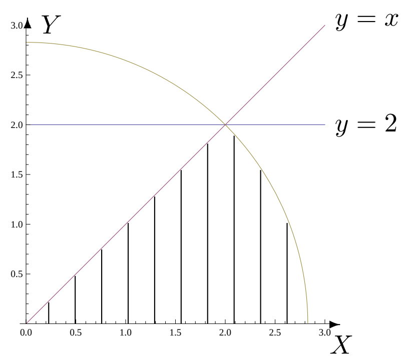
   et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

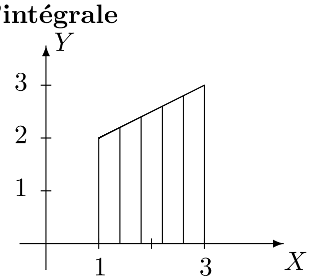
$$\int_0^2 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\ dy \right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$

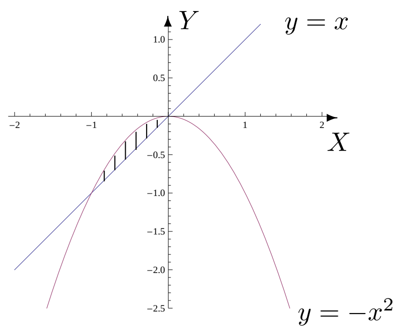


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\frac{x+3}{2}} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{2y-3}^3 f(x,y)\ dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x-y=0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f:(x,y) \mapsto f(x,y) = y\cos(x)$.



L'expression analytique de A est
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [x, -x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-\sqrt{-y}, y]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $7\sin(1) - 11\cos(1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x, y) = 4 - x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [x^2, 8 - x^2]\}$
   b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-1, x]\}$
   c) $f(x, y) = x + 2y$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{4 - x^2}\}\}$
   d) $f(x, y) = x^2 \cos(xy)$ sur $A = [-1, 1] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1024}{15}$.

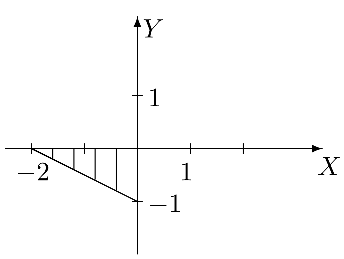
   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{16}{3} - 4\sqrt{2}$.

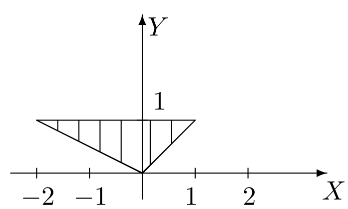
   d) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

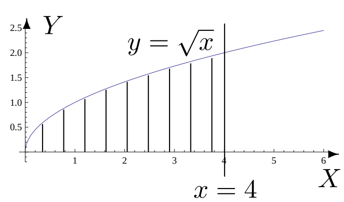
   a) $\iint_A e^{2x-y}\ dx\, dy$



   b) $\iint_A xy^2\ dx\, dy$



   c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{4 + x^2}}\ dx\, dy$



   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{4\,e^5 - 5\,e^4 + 1}{10\,e^4}$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $-\dfrac{3}{10}$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sqrt{5} - 1$.

Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

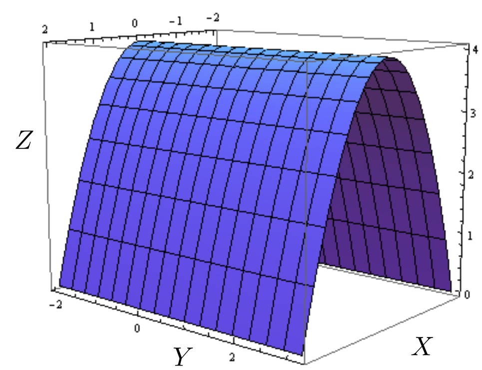
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

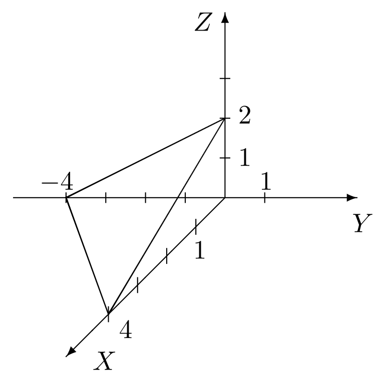
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0,\ y = -2$ et $y = 3$.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $x - y + 2z = 4$**

   Le volume du premier corps vaut 160/3 (unités de volume) et celui du deuxième vaut 16/3.
   Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



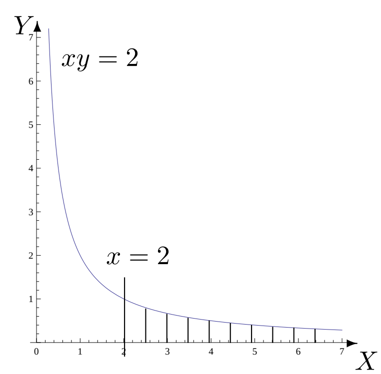
2)



II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

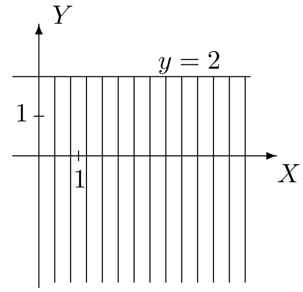
   a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$



La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1/4. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.

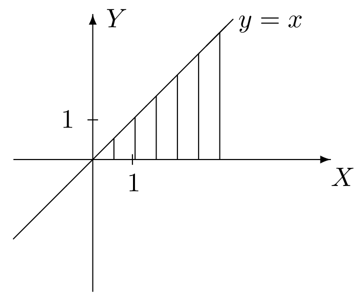
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{2y-x}\,dx\right)dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,+\infty[,\ y\in]-\infty,2]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e^4}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



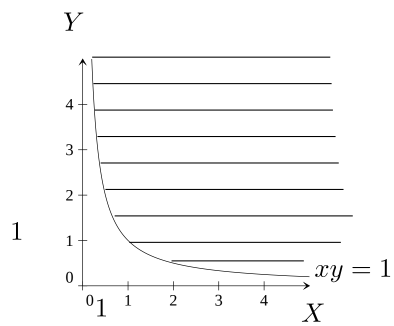
c) $\displaystyle\iint_A e^{-x^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\iint_A y^3\,e^{-xy^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ 1\le xy\}$

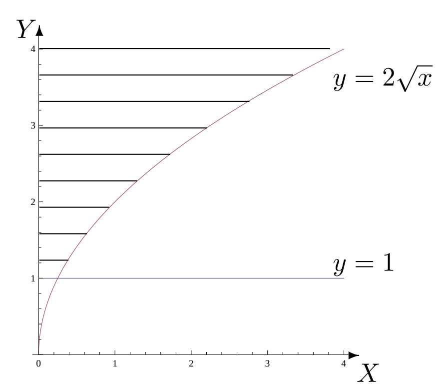
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



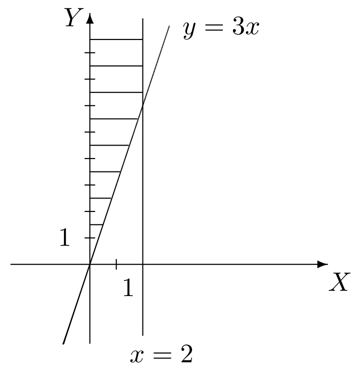
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a)\int_1^{+\infty}\left(\int_0^{y^2/4}\frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy,\quad b)\int_0^2\left(\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx,\quad c)\int_0^1\left(\int_0^{4x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

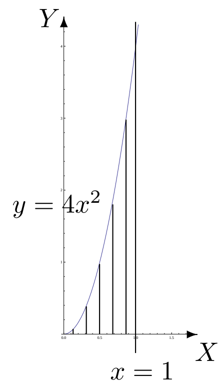
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[1,+\infty[,\ x\in[0,y^2/4]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2e}\ln(5/4)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,2],\ y \in [3x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $2\sqrt{2}\,\mathrm{arcotg}(3)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,4x^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{5}{4}\ln(5) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

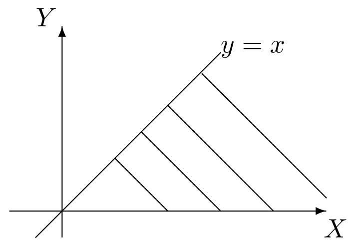
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \sin(y-x)e^{-x}\ dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

a) L'ensemble d'intégration A est donné par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.
En permutant l'ordre d'intégration, on a $I' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \sin(y-x)e^{-x}\ dx \right) dy$.
b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $-1/2$.
c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



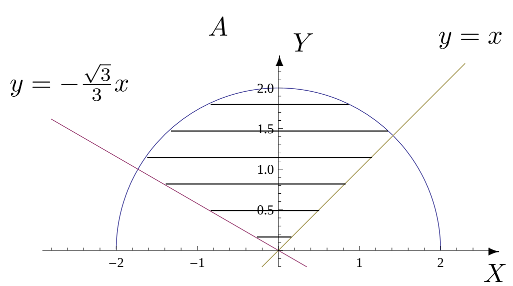
III. Intégration par changement de variables polaires

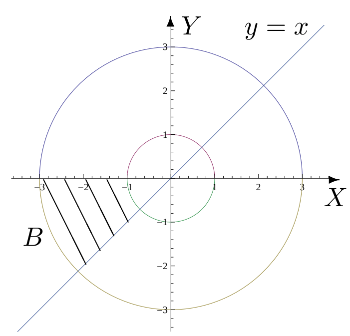
1. **Si elle existe, calculer**

   a) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   b) $\iint_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   c) $\iint_C (x+3y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$.





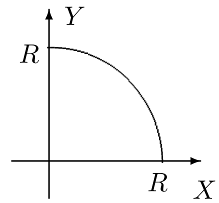
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\frac{14\pi}{9}$, 5 et $\frac{8}{3}(3-2\sqrt{2})$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

   et où s est l'aire de la surface A.
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

   La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

   Le volume du corps est 8π (unités de volume).

Liste 7 : approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\quad f_2(x) = \sqrt{1 + 4x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

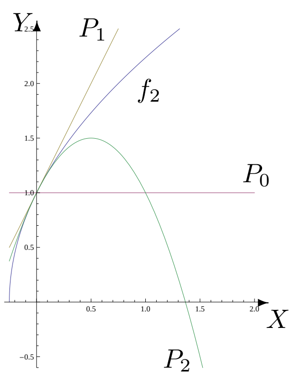
   $f_3(x) = \dfrac{1}{2 - x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\quad f_4(x) = \operatorname{arcotg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$)$, n = 0, 1, 2$

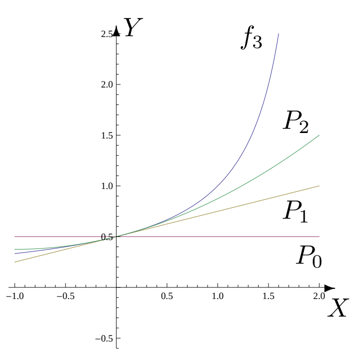
   $f_5(x) = \sin^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\quad f_6(x) = \cos(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

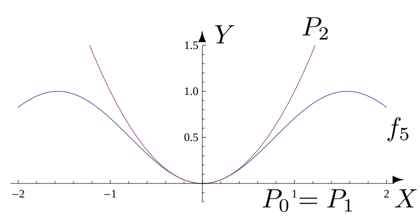
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1 + 2x$	$1 + 2x + \frac{3}{2}x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1 + 2x$	$1 + 2x - 2x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
$f_4\ (x_0 = 0)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4\ (x_0 = 1)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4},\ x \in \mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x - 1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x - 1) - \cos(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

   L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P_3(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}$.

   Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

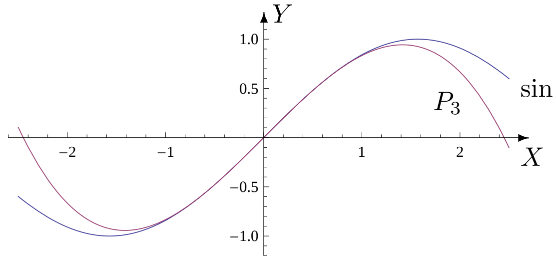






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** sin **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

   L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\sin(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24},\ \forall x \in \mathbb{R}$.



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**
Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\, x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6 \ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

Liste 8 : Révisions en vue de l'examen

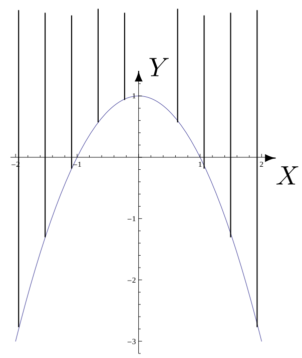
Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y-1}$$

a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y-1>0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t+1, 3t^2)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

Solution. La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2+4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2+4t>0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup \left]0,+\infty\right[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

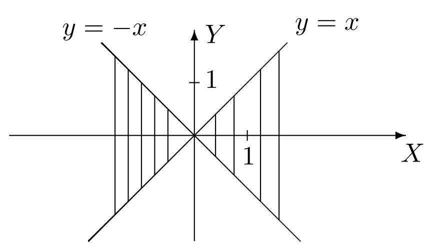
c) **Que vaut la dérivée de F en 2 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

Solution. La dérivée de F en 2 vaut $\dfrac{8}{3}$.

2. **On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\right)$.**

a) Déterminer son domaine de définition, d'infinie dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x, \dfrac{x-y}{x+y} > 0\right\}$



Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-3,1)$.

Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{y}{x^2-y^2} \qquad\qquad D_y f(x,y) = \frac{-x}{x^2-y^2}$$

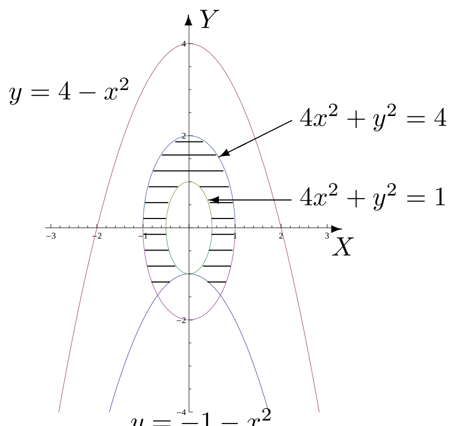
et, comme le point de coordonnées $(-3,1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_x f(-3,1) = \frac{1}{8}$ et $D_y f(-3,1) = \frac{3}{8}$.

3. **Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-1,4[\times]1,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x^2+y, 4x^2+y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**

Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2+y < \ 4,\ 1 < 4x^2+y^2 < 4\}.$$

Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbes étant exclus de l'ensemble.



Les dérivées partielles de F sont données par

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x^2+y, 4x^2+y^2)\ .\ 2x + (D_vf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 8x$$
$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x^2+y, 4x^2+y^2)\ .\ 1 + (D_vf)(x^2+y,4x^2+y^2)\ .\ 2y$$

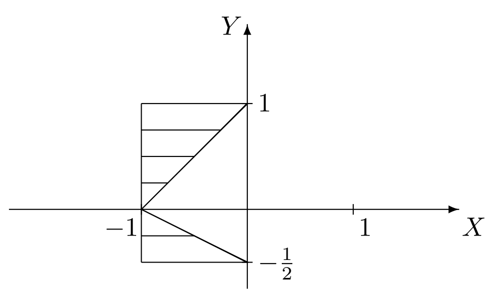
si u et v sont respectivement la première et la seconde variable de f.

4. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \displaystyle\int_0^9 \left(\int_{\sqrt{x}}^3 x\cos(y^5)\,dy\right) dx$

Solution. On a $\quad I = \dfrac{1}{10}\sin(243)$

b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ **si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $I = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

c) $I = \iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}\, dx\, dy$ **si** $A = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$

Solution. On a $I = \frac{\pi}{2}$

d) $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^3 \frac{e^{-(y+1)x}}{9+y^2}\, dy \right) dx$

Solution. On a $I = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{12}\right)$.

Calcul matriciel

1. **Soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si c'est possible, calculer a) AB **b)** BA **c)** BC **d)** CB **e)** AC **f)** CA

Solution.
a) Le produit AB est impossible à calculer car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.
b) Le produit BA est la matrice ligne $(-5 \;\; 4)$.
c) Le produit BC est la matrice de dimension 1 dont l'élément est $-8-3i$.
d) Le produit CB est la matrice

$$\begin{pmatrix} -3i & 2i \\ 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

e) Le produit AC est la matrice

$$\begin{pmatrix} 8+i \\ 4-i \end{pmatrix}.$$

f) Le produit CA est impossible à calculer car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

2. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 12 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 12 \\ 12 & 6 & 12 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ si I est la matrice identité de dimension 3.

3. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (double) et 2 (simple).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 2 sont les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{tel que} \qquad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

On donne la fonction f par

$$f(x) = \mathrm{tg}(3x).$$

a) **Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.**

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = 3x = P_2(x), \quad P_3(x) = 3x + 9x^3,\ x \in \mathbb{R};$$

b) **Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.**

Solution.

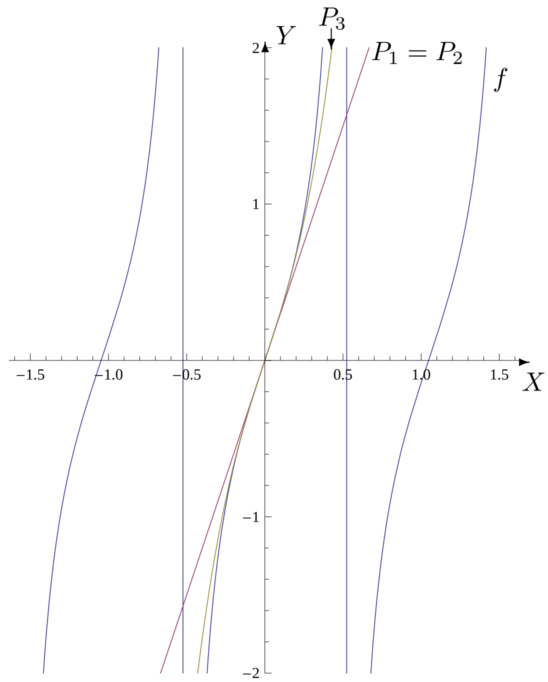


Table des matières